Algebraischer Nachweis der Plückerschen Formeln an der allgemeinen und rationalen Kurve dritter Ordnung,

ein Beitrag zur Theorie der Form p der ternären kubischen Form a_x^3.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion) der Kgl. Bayr. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 4. Dezember 1913

vorgelegt von

Karl Strauß

aus Bad Dürkheim.

Borna-Leipzig

Buchdruckerei Robert Noske

1914.

Inhaltsangabe.

Seite

Einleitung 1

Erster Teil.

Die Punktkoordinatenform von $p = u_p^6 = (a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(a\,d\,u)\,(b\,c\,u)$, wenn die Grundform a_x^3 die allgemeine ist 3

Zweiter Teil.

Die Punktkoordinatenform von $p = u_q^4$, wenn die Diskriminante R von a_x^3 verschwindet 27

Dritter Teil.

Theorie der Kurve sechster Klasse $u_p^6 = 0$ 37

Vierter Teil.

Tabelle 41

Einleitung.

Die Gleichung des Kegelschnitts $a_x^2 = 0$ lautet in Linienkoordinaten $(a\,b\,u)^2 = 0$. Stellt man aus der Linienkoordinatenform wieder die Punktkoordinatenform her, so erhält man $\frac{4}{3}\Delta \cdot a_x^2$, wobei $\Delta = (a\,b\,c)^2$ die Diskriminante des Kegelschnitts bedeutet.

Im folgenden will ich, durch eine von Herrn Gordan in seiner Vorlesung über Invariantentheorie gegebene Anregung veranlaßt, den analogen Schritt für die Kurve 3. Ordnung durchführen. Gleichzeitig wird damit für den Fall $n = 3$ ein rein algebraischer Nachweis für die aus allgemeinen geometrischen Betrachtungen abgeleiteten Plückerschen Formeln geliefert.

Benutzt wurden bei der Abfassung der Arbeit im wesentlichen:

1. Die Vorlesung des Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Gordan über ternäre kubische Formen. (Eine dort aufgestellte und von mir erweiterte Formentabelle liegt bei.)
2. Die Vorlesung des Herrn Prof. Dr. Nöther über algebraische Funktionen.
3. Gordans Vorlesungen über Invariantentheorie, von Kerschensteiner herausgegeben, Bd. II.
4. Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann.

Dank schulde ich Herrn Reallehrer Dr. Petri-München für den Rat, den er mir als Assistent der Universität Erlangen erteilt hat.

Erster Teil.

Die Linienkoordinatenform der ternären kubischen Form $f = a_x^3$ heißt $p = (a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(a\,c\,u)\,(b\,d\,u)$. Die Umrechnung von p in Punktkoordinaten führt, wie die Plückerschen Formeln lehren, auf die Form $W^3 \cdot f$, wo W das Produkt der 9 Wendetangenten darstellt. Es gehören nämlich zu den 9 Wendepunkten, die für die Kurve $f = 0$ als Ordnungskurve gewöhnliche Singularitäten sind, 9 Wendetangenten, welche, als Elemente der Klassenkurve $u_p^6 = 0$ betrachtet, außerordentliche Singularitäten darstellen. Diese erniedrigen den Grad der zu $u_p^6 = 0$ reziproken Ordnungskurve gemäß der bekannten Beziehung

$$n = k \cdot (k - 1) - 3w$$

um 27.

Gleichzeitig wird aber, analog der oben angeführten quadratischen Form und wie schon aus dem Clebschschen Übertragungsprinzip durch Abzählen der Symbole ersichtlich, in der Punktkoordinatenform von p als Faktor eine Invariante 12. Grades in den Symbolen der Grundform f auftreten. Die von einer der ternären Form u_p^6 entsprechenden binären Form 6. Grades p_x^6 zu bildende und ins Ternäre zu übernehmende Diskriminante wird nämlich vom 10. Grade in den Symbolen p, also vom 40. Grade in den Symbolen der Grundform f. Da das Produkt der 9 Wendetangenten vom 9. Grade in den Symbolen f ist, so muß sich noch ein von Variablen freier Faktor vom Grade $(40 - 27 - 1) = 12$ in den Symbolen der Grundform einstellen.

Dieser konnte bisher nicht rechnerisch bestimmt werden. Im folgenden soll nachgewiesen werden, daß diese Invariante die Diskriminante $R = S^3 - 6T^2$ der ternären kubischen Form ist und die gesuchte Punktkoordinatenform demnach lautet:

$$D_p = R \cdot W^3 \cdot f.$$

§ 1.

Methode der Lösung.

Aus dem Binären (Gordans Inv. S. 172) entnehme ich die Relation:

$$\Delta^3 + 2\,Q^2 + R\,f^2 = 0\,.$$

Sie wird ins Ternäre übernommen:

$$F(x,u) = -\,f^2 \cdot u_p^6 = \Theta^3 + 2\,Q^2 + P \cdot u_x\,.^{1})$$

---

[1]) Das Glied $P \cdot u_x$ dieser Identität ergibt sich durch Umformung von Q^2 unter Anwendung des Identitätssatzes und Benutzung der Tabelle. Man hat zunächst:

$$\left(f_y\right)^2 = f\,f_{1\,y^2} - \frac{1}{2}\,\Theta_x^2\,(\vartheta\,x\,y)^2\,,$$

hierin $y = \begin{cases}\Theta_1 u\\ \Theta_2 u\end{cases}$ gesetzt:

$$\left[(f\,\Theta u)\right]^2 = f\left(f_1\,\Theta_1\,\bar{u}\right)\cdot\left(f_1\,\Theta_2\,\bar{u}\right) - \frac{1}{2}\,\Theta_x^2\left(\vartheta\,x\,\Theta_1 u\right)\left(\vartheta\,x\,\Theta_2 u\right)\,u_{\vartheta_1}^2\,u_{\vartheta_2}\,,$$

ferner

$$\left(\Theta_y\right)^2 = \Theta\,\Theta_{1\,y^2} - \frac{1}{2}\left(\Theta\Theta_1\,x\,\bar{y}\right)^2 = \Theta\,\Theta_{1\,y^2} - \frac{1}{2}\left[(p\,x\,y)^2 + \frac{2}{5}\,(H\,u\,x\,y)^2\right]$$

(s. Tab. II, 18),

hierin $y = (a\,u)$ gesetzt:

$$\left(\Theta_1 a u\right)\left(\Theta_2 a u\right) = \Theta\cdot\left(f\,\Theta u\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(p\,x\,a\bar{u}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(H\bar{u}\,x\,a\bar{u}\right)^2\right].$$

Setzt man hingegen in $\left(\Theta_y\right)^2\ y = \vartheta\bar{x}\,u$, so erhält man

$$\left(\Theta_1\,\vartheta\,x\,u\right)\left(\Theta_2\,\vartheta\,x\,u\right) = \Theta_1\cdot\left(\Theta_2\,\vartheta\,x\,u\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(p\bar{x}\,u\,\vartheta\bar{x}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(H\bar{u}\,x\,\bar{u}\,\vartheta\,x\right)^2\right]$$

mithin

$$(Q)^2 = f\cdot\left[\Theta\left(f\,\Theta u\right)^2 - \frac{1}{2}\left(p\,x\,a\bar{u}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(H\bar{u}\,x\,a\bar{u}\right)^2\right] - \frac{1}{5}\,\Theta\cdot\left(\Theta_1\vartheta_2\bar{x}\,u\right)^2$$
$$+\frac{1}{4}\left(p\bar{x}\,u\,\vartheta\bar{x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(H\bar{u}\,x\,\bar{u}\,\vartheta\,x\right)^2$$

Die einzelnen Ausdrücke lassen sich folgendermaßen auf Formen des Systems zurückführen:

$$\left(f\,\Theta u\right)^2 = \frac{1}{3}\,s\cdot u_x \qquad \text{(Tab. III, 1)}$$

Die Form $F(x,u)$ hat zwar den Faktor f^2, doch fasse ich sie jetzt nur als Form in u auf und bilde nach u die Diskriminante, was vermöge des Baues der rechten Seite leicht möglich ist. Denn der letzte Ausdruck $P u_x$ braucht gar nicht berücksichtigt zu werden, da vorkommende Überschiebungen null werden; jeder Klammerfaktor hat $x\overline{x}$. Es kommt ja auch bei der Bildung der Punktkoordinatengleichung nur $(p\,x\,y)^6$ in Betracht.

Auf diese Weise erhält man eine Form, die in das Produkt von D_p und f^{20} zerfällt; denn das entstehende Resultat ist ganze Funktion von f, Δ, ψ und Ω (Gordan, Annalen I), zwischen denen, falls man Ω nur in der 1. Potenz nimmt, keine Relation

---

$$(p\,x\,a\overline{u})^2 = (a_p u_x - u_p a_x)^2 = f_p^2 u_x^2 - 2 f_p u_x + u_p^6 f$$

$$= \frac{13}{5}\Theta_s u_x^2 - f u_x^3 - \frac{2}{3}\Theta s u_x + f\cdot p \quad \text{(nach Tab. III, 123 u. 124)}$$

$$(H\overline{u}\,x\,a\overline{u})^2 = (aHu)^2 u_x^2 = \Theta_s u_x^2$$

$$(\Theta_1 \vartheta_2 \overline{x}\,u)^2 = \Theta_{\vartheta_1}^2 u_x^2 - 2\Theta_{\vartheta_1} u_{\vartheta_1} \Theta_x u_x + u_{\vartheta_1}^2 \Theta_x^2$$

$$= \frac{S}{6} u_x^4 - \frac{2}{3} f s u_x + 2 H u_x + \Theta^2 \qquad \text{(Tab. III, 48 u. 47)}$$

$$(p\,\overline{x}\,u\vartheta\overline{x})^2 = (p\vartheta x)^2 \cdot u_x^2$$

$$= -2\Theta_s f u_x^2 + 2 f t u_x^3 - \frac{28}{45}\Delta s u_x^3 - \frac{2}{5}\Theta H u_x^2 - u_x^4 \cdot \left(\frac{9}{5} K - \frac{1}{6} S\Theta + \frac{u_x^2 T}{15}\right)$$

$$H\overline{u}\,x\,\overline{u}\vartheta x)^2 = (H\overline{u}\,\vartheta x)^2 u_x^2 = H_\vartheta^2 u_x^4 - 2 H_\vartheta u_x^3 + u_\vartheta^2 H_x^2 u_x^2$$

$$= -\frac{K}{2} u_x^4 + \frac{5}{12} S\Theta u_x^4 - \frac{2}{3}\Delta s u_x^3 + \Theta H u_x^2 + \frac{T}{6} u_x^6 .$$

Somit

$$(Q)^2 = -\frac{1}{2} f^2 p - \frac{1}{2}\Theta^3 + f\Theta s u_x - \frac{13}{10} H\Theta u_x^2 - 2 f\Theta_s u_x^2 + f t u_x^3$$

$$- \frac{1}{45}\Delta s u_x^3 - \frac{1}{8}\Theta S u_x^4 - \frac{7}{20} K u_x^4 - \frac{1}{60} T u_x^6 .$$

Der gesuchte Ausdruck $P u_x$ hat demnach folgende Form:

$$P u_x = u_x \cdot \left(2 f\Theta s - \frac{13}{5} H\Theta u_x - 4 f\Theta_s u_x + 2 f t u_x^2 - \frac{2}{45}\Delta s u_x^2 - \frac{1}{4}\Theta S u_x^3 - \frac{7}{10} K u_x^3 - \frac{1}{30} T u_x^5\right).$$

besteht; da sich nun links der Faktor f^{20} absondert, so muß er sich auch rechts absondern.

Ich setze bei der Ableitung $f \neq 0$ voraus, wie ich überhaupt mit invarianten Relationen, nicht mit Gleichungen rechne.

Erster Abschnitt.

Die Diskriminante der binären Form 6. Grades $f^3 + \lambda\varphi^2$.[1])

Es sei f eine der ternären Form Θ entsprechende binäre quadratische Form a_x^2, φ eine Q entsprechende binäre kubische α_x^3.[2])

Gemäß dem Clebschschen Übertragungsprinzip soll die Diskriminante der Form $p_x^6 = f^3 + \lambda\varphi^2$ gebildet werden, ausgedrückt durch die Invarianten des Simultansystems von f und φ (s. Gordans Invariantentheorie S. 320 ff.).

§ 2.

Allgemeine Sätze zur Diskriminantenbildung.

Zur Aufstellung der Diskriminante der oben angeführten Form bedarf es einiger allgemeiner Sätze über Diskriminanten, die nachstehend aufgeführt werden.

Satz I.

Die Diskriminante[3]) von $f = a_x^n$ ist gleich der Resultante[4]) von f und $f_y = a_x^{n-1} a_y$ geteilt durch a_y^n.

---

[1]) An Stelle von 2 setze ich den Parameter λ. Nach Clebsch (Annalen 2: Zur Theorie der binären Formen 6. Ordnung S. 193) läßt sich jede Form 6. Grades auf die Form $f^3 + \lambda\varphi^2$ bringen.

[2]) Es wird angenommen, daß f und φ keinen gemeinsamen Faktor besitzen.

[3]) Die Diskriminante von $f = a_x^n$ ist definiert, wenn $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von f sind, durch:

$$D_f = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^n} \cdot \left[\Pi(\alpha_i - \alpha_\varkappa)\right]^2 \text{ für } i > \varkappa.$$

[4]) Die Resultante von $f = a_x^n$ und $\varphi = b_x^m$ ist definiert, wenn $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von f und $\beta_1 \ldots \beta_m$ die Wurzeln von φ sind, durch:

$$R_{f,\varphi} = \Pi(\alpha_i - \beta_\varkappa).$$

Beweis:

Es ist

$$f_y = \frac{1}{n} \cdot \left(y_1 \frac{\delta f}{\delta x_1} + y_2 \frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = y_1 \varphi + y_2 \psi ;$$

$$R_{f,\, y_1 \varphi + y_2 \psi} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(y_1 \varphi(a_\nu) + y_2 \psi(a_\nu) \right).$$

φ und ψ lauten in homogener Form:

$$\varphi = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_2^{(\nu)} f}{a_2^{(\nu)} x_1 - a_1^{(\nu)} x_2}; \quad \psi = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_1^{(\nu)} f}{a_2^{(\nu)} x_1 - a_1^{(\nu)} x_2},$$

wenn $\frac{a_1^{(\nu)}}{a_2^{(\nu)}}$ die ν-te Wurzel von

$$f = \left(a_2^{(1)} x_1 - a_1^{(1)} x_2 \right) \times \ldots \times \left(a_2^{(n)} x_1 - a_1^{(n)} x_2 \right),$$

demnach

$$\varphi(a_1) = \frac{a_2^{(1)}}{n} \left(a_1^{(1)} a_2^{(2)} - a_2^{(1)} a_1^{(2)} \right) \cdots \left(a_1^{(1)} a_2^{(n)} - a_2^{(1)} a_1^{(n)} \right)$$

$$\varphi(a_\nu) = \frac{a_2^{(\nu)}}{n} \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(1)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(1)} \right) \cdots \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(\nu-1)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(\nu-1)} \right)$$
$$\times \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(\nu+1)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(\nu+1)} \right) \cdots \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(n)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(n)} \right)$$

$$\psi(a_\nu) = \frac{a_1^{(\nu)}}{n} \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(1)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(1)} \right) \cdots \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(\nu-1)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(\nu-1)} \right) \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(\nu+1)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(\nu+1)} \right)$$
$$\cdots \left(a_1^{(\nu)} a_2^{(n)} - a_2^{(\nu)} a_1^{(n)} \right).$$

Der Faktor von $y_1^{n-\nu} y_2^{\nu}$ in obiger Resultante ist eine Summe von $\binom{n}{\nu}$ Produkten von der Form

$$\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_\varkappa) \psi(a_{\varkappa+1}) \cdots \psi(a_{\varkappa+\nu}) \varphi(a_{\varkappa+\nu+1}) \cdots \varphi(a_n)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}{n^n} \left[\Pi \left(a_1^{(i)} a_2^{(\varkappa)} - a_2^{(i)} a_1^{(\varkappa)} \right) \right]^2 a_2^{(1)} \cdots a_2^{(\varkappa)} a_1^{(\varkappa+1)} \cdots a_1^{(\varkappa+\nu)} a_2^{(\varkappa+\nu+1)} \cdots a_2^{(n)}$$

$$= D_f \cdot a_2^{(1)} \cdots a_2^{(\varkappa)} a_1^{(\varkappa+1)} \cdots a_1^{(\varkappa+\nu)} a_2^{(\varkappa+\nu+1)} \cdots a_2^{(n)}.$$

Die Summe dieser Produkte ergibt mithin den symbolischen Koeffizienten $a_1^{n-\nu}\, a_2^{\nu}$ multipliziert mit D_f.

Ich finde somit

$$R_{f,\,f_y} = D_f \cdot \left[y_1^n \cdot a_1^n + \binom{n}{1} y_1^{n-1} y_2 a_1^{n-1} a_2 + \cdots \binom{n}{\nu} y_1^{n-\nu} y_2^{\nu} a_1^{n-\nu} a_2^{\nu} + \cdots y_2^n a_2^n \right],$$

wo die $a_1^n \cdots a_2^n$ analog dem Koeffizienten $a_1^{n-\nu} a_2^{\nu}$ gebildet sind, nämlich $a_1^n = \left(\alpha_2^{(1)} \times \cdots \times \alpha_2^{(n)}\right)$

$$a_1^{n-1} a_2 = \left(\alpha_2^{(1)} \cdots \alpha_2^{(n-1)} \alpha_1^{(n)} + \cdots + \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \cdots \alpha_2^{(n)}\right);$$

mithin

$$\underline{R_{f,\,f_y} = D_f \cdot a_y^n} \cdot \text{(q. e. d.)}.$$

Satz II.

Führt man an Stelle der binären Formen m ter Ordnung φ und ψ ihre linearen Funktionen $\Phi = p\varphi + q\psi$ und $\Psi = p'\varphi + q'\psi$ ein, so ist die Resultante von Φ und Ψ gleich der mit der mten Potenz der Substitutionsdeterminante multiplizierten Resultante von φ und ψ.

$$R_{\Phi,\,\Psi} = \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}^m \cdot R_{\varphi,\,\psi}.$$ [1])

Satz III.

Sind φ und ψ die vorgelegten Formen und ist $\varphi = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n$, so ist die Resultante von φ und ψ gleich dem Produkt der Resultanten aus ψ und den Faktoren von φ:

$$R_{\varphi,\,\psi} = R_{\sigma_1,\,\psi} \cdot R_{\sigma_2,\,\psi} \cdots R_{\sigma_n,\,\psi}.$$

Ist im besondern $\varphi = \sigma^n$, so ist die Resultante von φ und ψ die n-te Potenz der Resultante von σ und ψ:

$$R_{\varphi,\,\psi} = \left(R_{\sigma,\,\psi}\right)^n.$$ [2])

---

[1]) Faa di Bruno, Theorie der binären Formen, deutsche Ausgabe, S. 83.

[2]) Faa di Bruno S. 75.

§ 3.

Zerlegung der Diskriminante.

Es ist

$$\mathfrak{p}_x^6 = f^3 + \lambda \varphi^2.$$

Hieraus:

$$\mathfrak{p}_x^5 \mathfrak{p}_y = f^2 f_y + \lambda \varphi \varphi_y.$$

Nach Satz I wird

$$R_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_y} = \mathfrak{p}_y^6 D_{\mathfrak{p}}.$$

Andrerseits ist

$$R_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_y} = \prod_{\nu=1}^{6} \left(f(\alpha_\nu)^2 \cdot f_y(\alpha_\nu) + \lambda \varphi(\alpha_\nu) \varphi_y(\alpha_\nu) \right),$$

wo α_ν eine Wurzel von $\mathfrak{p}_x^6$ ist.

Ist ϑ die Funktionaldeterminante von f und φ, so ist

$$\vartheta \cdot (x\,y) = (f, \varphi)\,(x\,y) = f \varphi_y - \varphi f_y.$$

Daraus finde ich durch Einsetzen einer Wurzel α_ν von $\mathfrak{p}_x^6$:

$$\varphi_y(\alpha_\nu) = \frac{\vartheta(\alpha_\nu)(\alpha_\nu y) + \varphi(\alpha_\nu) \cdot f_y(\alpha_\nu)}{f(\alpha_\nu)}.$$

Unter Benutzung dieses Wertes wird

$$R_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_y} = \prod_{\nu=1}^{6} \frac{\left(f_y(\alpha_\nu) \cdot \left(f^3(\alpha_\nu) + \lambda \varphi^2(\alpha_\nu) \right) + \lambda \varphi(\alpha_\nu) \vartheta(\alpha_\nu)(\alpha_\nu y) \right)}{f(\alpha_\nu)},$$

oder, weil $f^3(\alpha_\nu) + \lambda \varphi^2(\alpha_\nu) \equiv 0$,

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_y} &= \prod_{\nu=1}^{6} \frac{\lambda \varphi(\alpha_\nu) \cdot \vartheta(\alpha_\nu)(\alpha_\nu y)}{f(\alpha_\nu)} \\ &= \lambda^6 \frac{\prod_{\nu=1}^{6} \varphi(\alpha_\nu) \cdot \prod_{\nu=1}^{6} \vartheta(\alpha_\nu) \prod_{\nu=1}^{6} (\alpha_\nu y)}{\prod_{\nu=1}^{6} f(\alpha_\nu)} \\ &= \lambda^6 \frac{R_{\varphi, \mathfrak{p}} \cdot R_{\vartheta, \mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}_y^6}{R_{f, \mathfrak{p}}}, \end{aligned}$$

mithin nach Satz I von § 2

$$D_\mathfrak{p} = \lambda^6 \frac{R_{\varphi,\mathfrak{p}} \cdot R_{\vartheta,\mathfrak{p}}}{R_{f,\mathfrak{p}}}.$$

§ 4.
Die Resultanten $R_{f,\mathfrak{p}}$ und $R_{\varphi,\mathfrak{p}}$.

Es ist, wenn β_i eine Wurzel von f ist,

$$R_{f,\mathfrak{p}} = \prod_{i=1}^{2} \left(f^3(\beta_i) + \lambda \varphi^2(\beta_i) \right).$$

Da

$$f(\beta_i) \equiv 0,$$

so wird

$$R_{f,\mathfrak{p}} = \lambda^2 \cdot \prod_{i=1}^{2} \varphi^2(\beta_i),$$

mithin nach Satz III von § 2

$$\underline{R_{f,\mathfrak{p}} = \lambda^2 \cdot R_{f,\varphi}^2}.$$

Ebenso ist, wenn γ_i eine Wurzel von φ ist,

$$R_{\mathfrak{p},\varphi} = \prod_{i=1}^{3} \left(f^3(\gamma_i) + \lambda \varphi^2(\gamma_i) \right) \text{ und wegen } \varphi(\gamma_i) \equiv 0$$

$$= \prod_{i=1}^{3} f^3(\gamma_i),$$

mithin

$$\underline{R_{\varphi,\mathfrak{p}} = R_{f,\varphi}^3}.$$

§ 5.
Die Resultante $R_{\vartheta,\mathfrak{p}}$.

Nach Satz III ist

$$R_{\mathfrak{p},\vartheta^2} = (R_{\mathfrak{p},\vartheta})^2,$$

also

$$R_{\mathfrak{p},\vartheta} = \sqrt{R_{\mathfrak{p},\vartheta^2}}.$$

Nach Satz II ist

$$R_{\mathfrak{p}+\mu\vartheta^2,\vartheta^2} = R_{\mathfrak{p},\vartheta^2},$$

da die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ist. Weil aber

$$\vartheta^2 = -\frac{1}{2} A_{ff} \varphi^2 + \mathfrak{p}\varphi\mathfrak{f} - \frac{1}{2} \Delta\mathfrak{f},$$

so wird

$$\mathfrak{p} + \mu\vartheta^2 = \mathfrak{f}^3 + \lambda\varphi^2 - \frac{1}{2}\mu A_{ff}\varphi^2 + \mu\mathfrak{p}\varphi\mathfrak{f} - \frac{1}{2}\mu\Delta\mathfrak{f}.$$

Ich bestimme den Parameter μ derart, daß die Glieder mit φ^2 wegfallen, also

$$\frac{\mu}{2\lambda} \cdot A_{ff} = 1.^{1})$$

Dann wird:

$$\mathfrak{p} + \mu\vartheta^2 = \left(\mathfrak{f}^2 + \mu\mathfrak{p}\varphi - \frac{\mu}{2}\Delta\mathfrak{f}\right)\mathfrak{f} = \underline{\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{G}},$$

worin demnach

$$\underline{\mathfrak{G} = \mathfrak{f}^2 + \mu\mathfrak{p}\varphi - \frac{\mu}{2}\Delta\mathfrak{f}}$$

und

$$\underline{\mu = \frac{2\lambda}{A_{ff}}}.$$

Nach Satz III wird

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{p}+\mu\vartheta^2,\vartheta^2} &= R_{\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{G},\vartheta^2} \\ &= R_{\mathfrak{f},\vartheta^2} \cdot R_{\mathfrak{G},\vartheta^2} \\ &= \left(R_{\mathfrak{f},\vartheta}\right)^2 \cdot \left(R_{\mathfrak{G},\vartheta}\right)^2. \end{aligned}$$

---

[1]) Die Bestimmung $\frac{\mu}{2\lambda} A_{ff} = 1$ ist zulässig, solange $A_{ff} \neq 0$, was im vorliegenden Falle zutrifft.

Da aber

$$R_{p,\vartheta} = \sqrt{R_{p+\mu\vartheta^2,\vartheta^3}},$$

ergibt sich:

$$\underline{R_{p,\vartheta} = R_{f,\vartheta} \cdot R_{G,\vartheta}}.$$

I.

Die Resultante $R_{f,\vartheta}$.

Da $\vartheta(xy) = f\varphi_y - \varphi f_y$, so ist, wenn β_i eine Wurzel von f,

$$R_{\vartheta(xy),f} = \prod_{i=1}^{2} \left(f(\beta_i) \cdot \varphi_y(\beta_i) - \varphi(\beta_i) \cdot f_y(\beta_i) \right)$$

oder, weil $f(\beta_i) \equiv 0$,

$$= \prod_{i=1}^{2} \left(- \varphi(\beta_i) f_y(\beta_i) \right)$$

$$= R_{f,\varphi} \cdot R_{f,f_y}.$$

Nach Satz I ist

$$R_{f,f_y} = D_f \cdot f_y^2 = A_{ff} \cdot f_y^2.$$

Somit

$$R_{\vartheta(xy),f} = R_{f,\varphi} \cdot A_{ff} \cdot f_y^2.$$

Durch Vergleichung:

$$\underline{R_{f,\vartheta} = R_{f,\varphi} \cdot A_{ff}}.$$

II.

Zerlegung der Resultante $R_{G,\vartheta}$.

Es ist nach Satz III

$$R_{G,\vartheta \cdot q} = R_{G,\vartheta} \cdot R_{G,q},$$

wobei q die lineare Kovariante $(f^2, \varphi)^3$.

Ferner nach Satz II:

$$R_{G+\varrho\vartheta q,\vartheta \cdot q} = R_{G,\vartheta \cdot q},$$

da die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & \varrho \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Durch Anwendung des Identitätssatzes und der im Simultansystem von f und φ gegebenen Formen finde ich:

$$\vartheta \cdot q = f p^2 - \frac{1}{2} A_{ff} \Delta f + \frac{1}{2} A_{f\Delta} f^2 - \frac{1}{2} \varphi p A_{ff}.$$

Es wird demgemäß:

$$G + \varrho \vartheta \cdot q = f^2 + \mu p \varphi - \frac{\mu}{2} \Delta f + \varrho f p^2 - \frac{1}{2} \varrho A_{ff} f \Delta + \frac{1}{2} \varrho A_{f\Delta} f^2 - \frac{1}{2} \varrho \varphi p A_{ff}.$$

Wir wählen ϱ derart, daß die Glieder mit $\varphi \cdot p$ wegfallen.

$$\text{Mithin } \frac{1}{2} \varrho A_{ff} = \mu \text{ oder } \varrho = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Somit

$$\underline{G + \varrho \vartheta q = f \cdot H,}$$

wo

$$\underline{H = f - \frac{3}{2} \mu \Delta + \frac{\mu^2}{2\lambda} A_{f\Delta} f - \frac{\mu^2}{\lambda} p^2.}$$

Ich erhalte

$$R_{G + \varrho \vartheta q, \vartheta \cdot q} = R_{f \cdot H, \vartheta \cdot q}$$

oder nach Satz III

$$= R_{f,\vartheta} \cdot R_{f,q} \cdot R_{H,\vartheta} \cdot R_{H \cdot q}.$$

Unter Berücksichtigung der oben angeführten beiden Gleichungen ergibt sich demnach:

$$R_{G,\vartheta} \cdot R_{G \cdot q} = R_{f,\vartheta} \cdot R_{f,q} \cdot R_{H,\vartheta} \cdot R_{H,q}.$$

Beachten wir ferner die obige Gleichung

$$G + \varrho \vartheta q = f \cdot H,$$

so besteht die Identität

$$R_{G + \varrho \vartheta q, q} = R_{f \cdot H, q} = R_{f,q} \cdot R_{H \cdot q}.$$

Nun ist aber, wenn ε die Wurzel von q ist,

$$R_{G + \varrho \vartheta q, q} = G(\varepsilon) + \varrho \vartheta(\varepsilon) \cdot q(\varepsilon);$$

da aber $q(\varepsilon) \equiv 0$, so ist

$$R_{G+\varrho\vartheta\, q\cdot q} = G(\varepsilon)$$
$$= R_{G,q}.$$

Es besteht demnach die Beziehung

$$R_{G,q} = R_{f,q} \cdot R_{H\cdot q}.$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man aus der vorigen Seite

$$\underline{R_{G,\vartheta} = R_{f,\vartheta} \cdot R_{H,\vartheta}.}$$

§ 6.

Vorläufige Zusammenfassung.

Nach den Ergebnissen von § 4 und § 5 wird

$$D_p = \frac{\lambda^6\, R^3_{f,\varphi} \cdot R^2_{f,\vartheta} \cdot R_{H,\vartheta}}{\lambda^2 \qquad R^2_{f,\varphi}},$$

$$\underline{D_p = \lambda^4 \cdot R^3_{f,\varphi} \cdot A^2_{ff} \cdot R_{H,\vartheta}.}$$

§ 7.

Berechnung von $R_{H,\vartheta}$ in Invarianten des Simultansystems von f und φ.

Da H eine Form 2. Grades, ϑ eine solche 3. Grades ist, so lautet die Resultante analog Gordan, Invariantentheorie S. 330:

$$R_{H,\vartheta} = (H\pi^2)^2 - 2\, A_{HH} \cdot A_{HV},$$

wobei π und V sinngemäß übertragen den Formen p und Δ entsprechen, nämlich:

$$\pi = (H\vartheta)^2$$
$$V = (\vartheta\vartheta_1)^2.$$

Diese Invarianten sind durch diejenigen des Simultansystems von f und φ auszudrücken.

1. $\underline{(H\pi)^2}$.

$$\pi = (H\vartheta)^2 = \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{2\lambda} A_{f\Delta}\right) f - \frac{3}{2}\mu\Delta + \frac{\mu^2}{\lambda} p^2, \vartheta\right]^2.$$

Die Überschiebungen bildet man leicht mit Hilfe der Polaren

$$\vartheta_y^2 = (a\,\alpha)\,\alpha_y^2\,a_x - \frac{2}{3}\,p_y\,(x\,y).$$

Ich finde:

$$(f\,\vartheta)^2 = (a\,\alpha)\,(\alpha\,b)^2\,a_x - \frac{2}{3}(a\,p)\,a_x = (f\,p) - \frac{2}{3}(f\,p) = \frac{1}{3}(f\,p) = \frac{1}{3}q.$$

$$(\Delta\,\vartheta)^2 = (a\,\alpha)\,(\alpha\,\Delta)^2\,a_x - \frac{2}{3}(\Delta\,p)\,\Delta_x = \quad -\frac{2}{3}(\Delta\,p) = \frac{2}{3}(p\,\Delta) = \frac{2}{3}r,$$

da der 1. Ausdruck $= 0$.

$$(p^2\,\vartheta)^2 = (f,\,s) = \frac{1}{2}A_{f\Delta}\,q + \frac{1}{2}A_{ff}\,r.$$

Wenn man noch beachtet, daß $\frac{\mu}{2\lambda}A_{ff} = 1$, so ergibt sich

$$\pi = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\lambda}A_{f\Delta}\right)\cdot q.$$

Da ferner $q^2 = fF - \frac{1}{2}p^2\,A_{ff}$, so ergibt sich

$$\pi^2)^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\lambda}A_{f\Delta}\right)^2 \cdot \left[f\cdot\left(1 + \frac{\mu^2}{2\lambda}A_{f\Delta}\right) - \frac{2}{3}\mu\Delta + \frac{\mu^2}{\lambda}p^2,\ fF - \frac{1}{2}p^2\,A_{ff}\right]^2.$$

Die vorkommenden Überschiebungen sind bekannt. Sie lauten:

$$)^2 = A_{ff},\ (f\,p^2)^2 = F,\ (f\,\Delta)^2 = A_{f\Delta},\ (\Delta\,p^2)^2 = L = \frac{1}{2}\left(A_{ff}\,A_{\Delta\Delta} - A_{f\Delta}^2\right),(p^2p^2)^2 = 0.$$

Man erhält schließlich:

$$H\,\pi^2)^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{\mu^2}{\lambda}A_{f\Delta}\right)^2\left[\frac{1}{2}A_{ff}F + \frac{3}{4}\lambda\,A_{ff}A_{\Delta\Delta} - \mu\,A_{f\Delta}F - \frac{3}{4}\lambda A_{f\Delta}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda}F^2\right].$$

2. A_{HH}.

$$_H = (H\,H)^2 = \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{2\lambda}A_{f\Delta}\right)f - \frac{3}{2}\mu\Delta + \frac{\mu^2}{\lambda}p^2,\ \left(1 + \frac{\mu^2}{2\lambda}A_{f\Delta}\right)f - \frac{3}{2}\mu\Delta + \frac{\mu^2}{\lambda}p^2\right]^2.$$

Die Überschiebungen sind bereits aufgeführt. Gehörig zusammengefaßt lautet der Ausdruck:

$$A_{H,\,H} = A_{ff} - \mu\,A_{f\Delta} - \frac{3}{4}\mu^2\,A_{\Delta\Delta} + \frac{2\mu^2}{\lambda}F + \frac{\mu^3}{2\lambda}A_{f\Delta}^2 + \frac{\mu^4}{\lambda^2}A_{f\Delta}\,F.$$

3. $A_{H\nabla}$.

$$\nabla = (\vartheta\,\vartheta_1)^2 = \left[(a\,\alpha)\,\alpha_y^2\,a_x - \frac{2}{3}\,p_y\,(x\,y),\ (a\,\alpha)\,\alpha_y^2\,a_x - \frac{2}{3}\,p_y\,(x\,y)\right]^2$$

$$= (f\,\Delta)\,(f_1\Delta) - \frac{4}{3}\,(f,\Theta) - \frac{2}{9}\,p^2$$

$$= \frac{1}{3}\,A_{f\Delta}\,f + \frac{1}{6}\,A_{ff}\,\Delta - \frac{2}{9}\,p^2$$

$$A_{H\nabla} = (H\nabla)^2 = \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{\lambda}\,A_{f\Delta}\right)f - \frac{3}{2}\,\mu\,\Delta + \frac{\mu^2}{\lambda}\,p^2,\ \frac{1}{3}\,A_{f\Delta}\,f + \frac{1}{6}\,A_{ff}\,\Delta - \frac{2}{9}\,p^2\right]$$

Nach Zusammenfassung der überschobenen Formen finde ich:

$$A_{H\nabla} = \frac{1}{2}\,A_{ff}\,A_{f\Delta} - \frac{2}{9}\,F - \frac{1}{3}\,\mu\,A_{f\Delta}^2 + \frac{2}{9}\,\frac{\mu^2}{\lambda}\,A_{f\Delta}\,F + \frac{1}{6}\,\lambda\,A_{\Delta\Delta}\,.$$

Setzt man die Werte 1., 2. und 3. in die obige Diskriminantenform ein, so erhält man in vereinfachter Form:

$$R_{H,\vartheta} = \frac{1}{2}\,A_{ff}\,F - A_{ff}^2\,A_{f\Delta} + \frac{13}{4}\,\lambda\,A_{f\Delta}^2 - \frac{1}{4}\,\lambda\,A_{ff}\,A_{\Delta\Delta} - 5\,\mu\,A_{f\Delta}\,F$$

$$+ \frac{5}{2}\,\lambda\,\mu\,A_{f\Delta}\,A_{\Delta\Delta} - 2\,\mu^2\,A_{f\Delta}^3 + \frac{1}{4}\,\lambda\,\mu^2\,A_{\Delta\Delta}^2 - \mu^2\,F\,A_{\Delta\Delta} + \frac{\mu^2}{\lambda}\,F^2\,.$$

§ 8.

Endgültige Form der Diskriminante.

In § 6 fanden wir:

$$D_p = \lambda^4\,R_{f,\varphi}^3\,A_{ff}^2\,R_{H,\vartheta}\,.$$

Durch Multiplikation von A_{ff}^2 mit dem in § 7 für $R_{H,\vartheta}$ gewonnenen Ausdruck ϑ bringt man den Parameter μ zum Verschwinden.

Man erhält schließlich:

$$D_\mathfrak{p} = \lambda^4 \cdot R_{\mathfrak{f},\varphi}^3 \cdot \Big[\frac{1}{2} A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^3 F - A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^4 A_{\Delta\Delta} - 10\lambda A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} A_{\mathfrak{f}\Delta} F$$
$$+ \frac{13}{4}\lambda A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^2 A_{\mathfrak{f}\Delta}^2 - \frac{1}{4}\lambda A_{\mathfrak{f}\Delta}^3 A_{\Delta\Delta} + 4\lambda F^2 - 8\lambda^2 A_{\mathfrak{f}\Delta}^3$$
$$+ 5\lambda^2 A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} A_{\mathfrak{f}\Delta} A_{\Delta\Delta} - 4\lambda^2 A_{\Delta\Delta} F + \lambda^3 A_{\Delta\Delta}^2\Big].$$

Setzt man ferner gemäß S. 4 den Parameter $\lambda = 2$, so erhält man die ins Ternäre zu übernehmende Form für $D_\mathfrak{p}$:

$$D_\mathfrak{p} = 2^4 \cdot (F - 2 A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} A_{\mathfrak{f}\Delta})^3 \cdot \Big[\frac{1}{2} A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^3 F - A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^4 A_{\mathfrak{f}\Delta} - 20 A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} A_{\mathfrak{f}\Delta} F$$
$$+ \frac{13}{2} A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^2 A_{\mathfrak{f}\Delta}^2 - \frac{1}{2} A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}^3 A_{\Delta\Delta} + 8F^2 - 32 A_{\mathfrak{f}\Delta}^3 + 20 A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} A_{\mathfrak{f}\Delta} A_{\Delta\Delta}$$
$$- 16 A_{\Delta\Delta} F + 8 A_{\Delta\Delta}^2\Big].$$

Zweiter Abschnitt.

Übertragung der Diskriminante ins Ternäre.

§ 9.

Übertragung der Invarianten $A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}$, $A_{\mathfrak{f}\Delta}$, $A_{\Delta\Delta}$, F.

I.

$A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}$.

Ich setze f gemäß unsern S. 6 gemachten Festsetzungen äquivalent der ternären quadratischen Form Θ

$$\mathfrak{f} \sim \Theta,$$

dann ist

$$A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} = (\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)^2 \sim (\vartheta\vartheta_1 x)^2 \Theta_x^2 \Theta_{1x}^2$$

oder nach Tabelle III, 117

$$A_{\mathfrak{f}\mathfrak{f}} \sim \frac{4}{3} \mathfrak{f}\Delta.$$

II.

$A_{f\Delta}$.

Ich setze

$$\varphi \sim Q = (f\,\Theta\,u)\,.$$

Es ist

$$\Delta^{1)} = (\varphi\,\varphi_1)^2 \sim (q\,q_1\,x)^2 \cdot u_q\,u_{q_1}\,Q_x^3\,Q_{1x}^3\,.$$

Aus der 2. Polare von Q nach u

$$v_q^2\,u_q = (a\,\Theta\,u)\,a_x^2\,\Theta_x\,v_\vartheta^2 - \frac{1}{3}\,v_x\,(\Delta\,u\,v)$$

(Tabelle II, 21) findet man als 2. Überschiebung nach v

$$(q\,q_1\,x)^2\,u_q\,u_{q_1} = \left[(a\,\Theta\,u)\,a_x^2\,\Theta_x\,v_\vartheta^2 - \frac{1}{2}\,v_x\,(\Delta\,u\,v),\,(a\,\Theta\,u)\,a_x^2\,\Theta_x\,v_\vartheta^2 - \frac{1}{3}\,v_x\,(\Delta\,u\,v)\right]^2$$

$$= (a\,\Theta\,u)\,(b\,\Theta\,u)\,(\vartheta\,\vartheta_1\,x)^2\,\Theta_x\,\Theta_{1x}\,a_x^2\,b_x^2\,.$$

Diese Form ergibt sich auch aus der Polaren Tabelle II, 10

$$(\vartheta\,\vartheta_1\,x)^2\,\Theta_x\,\Theta_y\,\Theta_{1x}\,\Theta_{1y} = \frac{1}{3}\,a_s\,a_x^2 \cdot (s\,x\,y)^2 + \frac{2}{3}\,a_x^2\,a_y\,\Delta_x^2\,\Delta_y + \frac{2}{3}\,f\,\Delta_y^2\,\Delta_x\,.$$

indem man y einmal durch $a\bar{u}$ und einmal durch $b\bar{u}$ ersetzt.

Man erhält:

$$(\vartheta\,\vartheta_1\,x)^2\,\Theta_x\,\Theta_{1x}\,(a\,\Theta\,u)\,(b\,\Theta_1\,u)\,a_x^2\,b_x^2 = \frac{1}{3}\,a_s\,a_x^2\,(s\,x\,b\,\bar{u})\,(s\,x\,c\,\bar{u})\,b_x^2\,c_x^2$$

$$+ \frac{2}{3}\,a_x^2\,(a\,b\,u)\,b_x^2 \cdot (\Delta\,c\,u)\,\Delta_x^2\,c_x^2 + \frac{2}{3}\,f\,(a\,\Delta\,u)\,(b\,\Delta\,u)\,\Delta_x\,a_x^2\,b_x^2\,.$$

Auf der rechten Seite wird der 1. Ausdruck:

$$a_s\,a_x^2 \cdot (s\,x\,b\,\bar{u})\,(s\,x\,c\,\bar{u})\,b_x^2\,c_x^2 = a_s\,b_s\,c_s\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2\,u_x^2 - 2\,a_s\,b_s\,a_x^2\,b_x^2\,u_s \cdot f \cdot u_x + a_s\,u_s^2\,a_x^2 \cdot f^2$$

$$= u_x^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\,S\,f^2 - \frac{1}{6}\,\Delta^2\right) - 2\,f \cdot f_s\,f_{1s}\,u_x + f^2\,f_s \quad \text{(Tab. III, 32).}$$

2. Ausdruck:

$$a_x^2 \cdot (a\,b\,u)\,b_x^2\,(\Delta\,c\,u)\,\Delta_x^2\,c_x^2 = 0\,.$$

---

[1]) Die links vom Äquivalentzeichen stehende binäre Form $\Delta = (\varphi\,\varphi_1)^2$ ist mit der rechtsstehenden ternären Form $\Delta = (a\,b\,c)^2\,a_x\,b_x\,c_x$ nicht zu verwechseln.

3. Ausdruck:

$$(a\,\Delta\,u)\,(b\,\Delta\,u)\,a_x^2\,b_x^2\,\Delta_x$$

$$= (b\,\Delta\,u)\,a_x^2\,b_x\,\Delta_x\,\big((b\,\Delta\,u)\,a_x + (a\,b\,u)\,\Delta_x + (a\,b\,\Delta)\,u_x\big)$$

$$= f\,(f\,\Delta\,u)^2 + \frac{1}{2}\,\Delta_x^2\cdot(a\,b\,u)\,a_x\,b_x\big[(a\,b\,u)\,\Delta_x + (a\,b\,\Delta)\,u_x\big]$$

$$+ \frac{1}{2}\,(a\,b\,\Delta)\,u_x\,a_x\,b_x\big[(a\,b\,u)\,\Delta_x + (a\,b\,\Delta)\,u_x\big]$$

$$= f\,f_s - \frac{1}{6}\,f\,S\cdot u_x^2 + \frac{1}{2}\,\Delta\,\Theta + u_x\,\Delta_\vartheta + \frac{1}{2}\,\Delta_\vartheta^2\,u_x^2 \quad \text{(Tab. III, 10)},$$

mithin

$$\underline{\Delta} \sim (\vartheta\,\vartheta_1\,x)^2\,(a\,\Theta\,u)\,(b\,\Theta_1\,u)\,a_x^2\,b_x^2 = \underline{f^2\cdot f_s - \frac{1}{3}\,f\,\Delta\,\Theta} \pmod{u_x},$$

folglich

$$(f\,\Delta)^2 \sim \left(\Theta, f^2 f_s - \frac{1}{3}\,f\,\Delta\,\Theta\right)^2$$

$$\sim f^2\cdot(\vartheta\,s\,x)^2\,\Theta_x^2\,a_s\,a_x^2 - \frac{1}{3}\,f\,\Delta\,(\vartheta\,\vartheta_1\,x)^2\,\Theta_x^2\,\Theta_{1x}^2.$$

Diese Formen finden sich in der Tabelle III, 89 und 117, demnach

$$A_{f\Delta} \sim \frac{1}{3}\,f^2\,\Delta^2 + \frac{1}{6}\,S\,f^4 - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\,f\,\Delta\cdot f\,\Delta$$

$$\underline{A_{f\Delta} \sim \frac{1}{6}\,S\,f^4 - \frac{1}{9}\,f^2\,\Delta^2}\ .$$

III.

$A_{\Delta\Delta}$.

Nach II. ist

$$\Delta \sim f^2 f_s - \frac{1}{3}\,f\,\Delta\,\Theta \pmod{u_x},$$

mithin

$$A_{\Delta\Delta} = (\Delta\Delta_1)^2 \sim \left(f^2 f_s - \frac{1}{3} f \Delta\Theta, f^2 f_s - \frac{1}{3} f \Delta\Theta\right)^2$$

$$\sim f^4 (s\, s_1\, x)^2 a_s b_s a_x^2 b_x^2 - \frac{2}{3} f^3 \Delta (\vartheta\, s\, x)^2 a_s a_x^2 \Theta_x^2 + \frac{1}{9} f^2 \Delta^2 (\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2 \Theta_x^2 \Theta_1^2$$

Nach Tabelle III, 113, 89 und 117

$$A_{\Delta\Delta} \sim f^4 \cdot \left(\frac{2}{9} T f^2 - \frac{4}{3} \psi\right) - \frac{2}{3} f^3 \Delta \left(\frac{1}{3} \Delta^2 + \frac{1}{6} S f^2\right) + \frac{1}{9} f^2 \Delta^2 \cdot \frac{4}{3} f \Delta$$

oder

$$A_{\Delta\Delta} \sim f^3 \left(-\frac{4}{3} \psi f + \frac{2}{9} f^3 T - \frac{2}{27} \Delta^3 - \frac{1}{9} S f^2 \Delta\right).$$

IV.

F.

$$F = (f p^2)^2$$

$$p = (f, \varphi)^2 \sim (\vartheta\, q\, x)^2 \Theta_x^2 Q_x^3 u_q .$$

Man erhält $(\vartheta\, q\, x)^2$, wenn man in der Polaren $v_q^2 u_q$ v durch $\vartheta \bar{x}$ ersetzt:

$$(\vartheta\, q\, x)^2 u_q = (a\, \Theta\, u)\, \Theta_x\, \Theta_{1x}^2\, a_x^2\, (\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2.$$

Die rechte Seite erhält man, wenn man in dem Glied

$$(\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2\, \Theta_x\, \Theta_y\, \Theta_{1x}^2$$

der 1. Polaren von $(\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2$ y durch $\bar{a u}$ ersetzt.

Dieses Glied $(\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2\, \Theta_x\, \Theta_y \Theta_{1x}^2$ erhält man, wenn man von dem Polarenglied $(\vartheta\, \vartheta_1\, z)^2\, \Theta_x^2\, \Theta_{1x}^2$ die erste Polare nach y bildet und an Stelle der z wieder x schreibt.

Nach Tabelle II, 6

$$(\vartheta\, \vartheta_1\, z)^2\, \Theta_x\, \Theta_y\, \Theta_{1x}^2 = \frac{1}{3} a_z^2 a_y \Delta + a_z^2 a_x \Delta_y \Delta_x^2$$

oder für $z = x$

$$(\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2\, \Theta_x\, \Theta_y \Theta_{1x}^2 = \frac{1}{3} f_y \Delta + f \Delta_y;$$

hierin $y = a\bar{u}$ ersetzt:

$$(a\, \Theta\, u)\, \Theta_x\, \Theta_{1x}^2\, (\vartheta\, \vartheta_1\, x)^2\, a_x^2 = \frac{1}{3} (a\, b\, u)\, a_x^2\, b_x^2\, \Delta + f\, (f\, \Delta\, u)\, \Delta_x^2\, a_x^2 .$$

Das 1. Glied ist 0, das 2. eine Form des Systems. Mithin

$$\underline{p \sim f(f\,\Delta u)}$$

$$p^2 \sim f^2 (a\,\Delta u)\, a_x^2\, \Delta_x^2 (b\,\Delta_1 u)\, b_x^2\, \Delta_{1x}^2 .$$

Die rechte Seite wird umgeformt entweder durch wiederholte Anwendung des Identitätssatzes oder auch, indem man p^2 als das ins Ternäre übernommene Quadrat der Funktionaldeterminante $(f\Delta)$ der Formen f und Δ betrachtet.

Man findet schließlich mit Hilfe der Tabelle:

$$\underline{p^2 \sim f^2 \left(\Theta \left(\frac{1}{12} S f^2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \right) + f \Delta f_s - f^2 f_t \right) (\mathrm{mod.}\, u_x)} .$$

Es wird also

$$\sim f^2 \cdot \left[\Theta, \left(\frac{1}{12} S f^2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \right) \Theta + f \Delta f_s - f^2 f_t \right]^2$$

$$\sim f^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{12} S f^2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \right) (\vartheta \vartheta_1 x)^2 \Theta_x^2 \Theta_{1x}^2 + f \Delta\ (\vartheta s x)^2 a_s a_x^2 \Theta_x^2 - f^2 (\vartheta t x)^2 a_t a_x^2 \Theta_x^2 \right).$$

Nach Tabelle III

$$\sim \left(\frac{1}{12} S f^2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \right) \frac{4}{3} f^3 \Delta + f^3 \Delta \left(\frac{1}{3} \Delta^2 + \frac{1}{6} S f^2 \right) - f^4 \left(\frac{4}{3} \psi + \frac{1}{9} T f^2 + \frac{1}{9} S f \Delta \right)$$

$$\underline{\sim f^3 \cdot \left(-\frac{4}{3} \psi f - \frac{1}{9} T f^3 + \frac{1}{6} S f^2 \Delta - \frac{1}{3} \Delta^3 \right).}$$

V.

Zusammenstellung.

$$A_{ff} \sim \frac{4}{3} f \Delta$$

$$A_{f\Delta} \sim \frac{1}{6} S f^4 - \frac{1}{9} f^2 \Delta^2 = \frac{1}{3} f^2 \cdot \left(\frac{1}{2} S f^2 - \frac{1}{3} \Delta^2 \right)$$

$$A_{\Delta\Delta} \sim f^3 \left(-\frac{4}{3} \psi f + \frac{2}{9} T f^3 - \frac{2}{27} \Delta^3 - \frac{1}{9} S f^2 \Delta \right)$$

$$F \sim f^3 \cdot \left(-\frac{4}{3} \psi f - \frac{1}{9} T f^3 - \frac{1}{3} \Delta^3 + \frac{1}{6} S f^2 \Delta \right)$$

§ 10.

Die Übertragung von $R_{f,\varphi}$ ins Ternäre.

$$R_{f,\varphi} = F - 2A_{ff}A_{f\Delta} \sim f^3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\psi f - \frac{1}{9}Tf^3 - \frac{1}{3}\Delta^3 + \frac{1}{6}Sf^2\Delta\right)$$
$$- 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} f^3\Delta \cdot \left(\frac{1}{2}Sf^2 - \frac{1}{3}\Delta^2\right)$$

$$\underline{R_{f,\varphi}} \qquad \sim \underline{f^3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\psi f - \frac{1}{9}Tf^3 - \frac{5}{18}Sf^2\Delta - \frac{1}{27}\Delta^3\right)}$$

$$\sim \underline{f^3 \cdot W.}^{1})$$

§ 11.

Die Übertragung des II. Faktors der Diskriminante.

Ersetzt man die binären Invarianten durch die ihnen zukommenden ternären Ausdrücke, so erhält man ein Aggregat von Ko- und Invarianten, dessen einzelne Glieder vom 24. Grade in den Symbolen der Grundform f und vom 36. Grade in den x sind.

Es hat die folgende Form:

$$c_0\psi^2 f^8 + c_1\psi Sf^5 + c_2\Delta^6 f^6 + c_3\psi\Delta^3 f^7 + c_4 S\Delta^4 f^8 + c_5 T\Delta^3 f^9$$
$$+ c_6\psi Tf^{10} + c_7 S^2\Delta^2 f^{10} + c_8 ST\Delta f^{11} + c_9 S^3 f^{12} + c_{10} T^2 f^{12}.$$

Die Ausrechnung zeigt, daß die Koeffizienten

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0, \ldots c_8 = 0.$$

Hingegen sind:

$$c_9 = -\frac{2^2}{3^3}$$

$$c_{10} = \frac{2^5}{3^4} + \frac{2^5}{3^4} + \frac{2^3}{3^4} = \frac{2^3}{3^2}.$$

---

[1]) Der Nachweis, daß obige Form das Produkt der 9 Wendetangenten darstellt, wird in § 13 durch Aufstellung ihrer Gleichung gebracht. Sie wurde bereits durch Clebsch in Crelles Journal Bd. 58 aufgestellt.

Mithin 2. Faktor

$$= -\frac{2^2}{3^3} S^3 f^{12} + \frac{2^3}{3^2} T^2 f^{12}$$

$$= \frac{8}{9} f^{12} \cdot \left(T^2 - \frac{1}{6} S^3\right) = \frac{8}{9} f^{12} \cdot R.$$

§ 12.

Die Form p in Punktkoordinaten.

Auf Grund der Ergebnisse der §§ 11 u. 12 erhält man unter Vernachlässigung des unwesentlichen Zahlenfaktors:

$$f^{20} D_p = f^{21} \cdot W^3 \cdot R$$

oder nach Division durch den bereits eingangs erledigten Faktor f^{20}

$$\mathbf{D_p = f W^3 R.}$$

§ 13.

Die Gleichung der 9 Wendetangenten.

In einem Wendepunkt y der C_3 bestehen gleichzeitig die 3 Gleichungen:

$$a_y^3 = 0;$$

$$a_y^2 a_x = 0;$$

$$a_y a_x^2 = 0.$$

Daraus sind die y_i zu eliminieren.

Betrachtet man die x_i als konstant, die y_i variabel, so stellen die 3 Gleichungen drei in einem Punkte sich schneidende Kurven dar, eine C_3, eine C_2 und eine Gerade. Ich stelle deshalb die Gleichung der Schnittpunkte der C_3 und C_2 auf (Clebsch-Lindemann S. 281) und setze, da sie auch durch einen Punkt der Geraden $a_y a_x^2 = 0$ erfüllt wird, deren Koordinaten darin ein. Die sich ergebende Beziehung zwischen den x_i ist die Gleichung der Wendetangenten.

I.

Die Gleichung der Schnittpunkte.

Ist

$$f \sim a_y^2 a_x, \quad \varphi \sim a_y^3,$$

wo f und φ Symbole binärer Formen sind, so lautet die binäre Form der Schnittpunktsgleichung

$$R = F - 2 A_{ff} A_{f\Delta}.$$

Durch Ränderung wird

$$A_{ff} \sim (a\,b\,u)^2 a_x b_x = \Theta$$

$$A_{f\Delta} \sim (a\,b\,u)^2 (a\,c\,u)(b\,c\,u)\, c_x, \text{ da } \Delta = (a\,b\,u)^2 \cdot a_y b_y$$

$$\sim (a\,\Theta u)^2 a_x = \frac{1}{3} s u_x \qquad \text{(Tabelle III, 1).}$$

$$p \sim (a\,b\,u)^2 a_x b_y = \Theta_x \Theta_y;$$

$$(f\,p^2)^2 \sim (a\,\Theta u)\,(a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x \Theta_{1x} a_x.$$

Nach Identitätssatz wird

$$(a\,\Theta u)\,(a\,\Theta_1 u) \cdot \Theta_x \Theta_{1x} a_x$$

$$= (a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x a_x \cdot \left[(a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x - (\Theta\,\Theta_1 u)\,a_x + (a\,\Theta\,\Theta_1)\,u_x\right],$$

der 1. Ausdruck:

$$(a\,\Theta_1 u)^2 \Theta_x^2 = \frac{1}{3} \Theta s u_x \quad \text{(Tabelle III, 1);}$$

der 2. Ausdruck:

$$(\Theta\,\Theta_1 u)\,(a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x a_x^2 = \frac{1}{2} (\Theta\,\Theta_1 u)\left[(a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x - (a\,\Theta u)\,\Theta_{1x}\right] a_x^2$$

$$= \frac{1}{2} (\Theta\,\Theta_1 u)\left[(\Theta\,\Theta_1 u)\,a_x - (\Theta\,\Theta_1 a)\,u_x\right] a_x^2$$

$$= \frac{1}{2} p f - \frac{1}{2} f_p u_x;$$

der 3. Ausdruck:

$$(a\,\Theta\,\Theta_1)\,(a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x\,a_x\,u_x = \frac{1}{2}\,u_x\,(a\,\Theta\,\Theta_1)\,a_x\,[(a\,\Theta_1 u)\,\Theta_x - (a\,\Theta u)\,\Theta_{1x}]$$

$$= \frac{1}{2}\,u_x \cdot (a\,\Theta\,\Theta_1)\,a_x\,[(\Theta\,\Theta_1 u)\,a_x - (\Theta\,\Theta_1 a)\,u_x]$$

$$= \frac{1}{2}\,u_x \cdot f_p - \frac{1}{2}\,u_x^2 \cdot \left(f_p^2 + \frac{2}{5}\,\Theta_s\right),$$

man erhält den 2. Teil $(\Theta\,\Theta_1 a)^2\,u_\vartheta^2\,u_{\vartheta_1}^2\,a_x$ aus der Polaren 18 Tabelle II (1. Form), indem man für $v = a$ setzt.

Mithin $(f\,p^2)^2 = F \sim$ (nach Tabelle III, 139 und 140)

$$-\frac{1}{2}\,f_p + \frac{2}{3}\,\Theta \cdot s \cdot u_x - \frac{3}{2}\,\Theta_s\,u_x^2 + \frac{1}{2}\,t\,u_x^3 .$$

Somit lautet die Gleichung der Schnittpunkte

$$R \sim -\frac{1}{2}\,f_p - \frac{3}{2}\,u_x^2\,\Theta_s + \frac{1}{2}\,u_x^3\,t = S .$$

II.

Die Wendetangenten.

In S ist u_i durch $a_i a_x^2$ zu ersetzen;
man erhält somit

$$S_{\left(u_i = a_i a_x^2\right)} = -\frac{1}{2}\,f \cdot a_p\,b_p\,c_p\,d_p\,e_p\,f_p - \frac{3}{2}\,f^2\,\Theta_s\,a_s\,b_s\,c_\vartheta\,d_\vartheta + \frac{1}{2}\,f^3 \cdot a_t\,b_t\,c_t .$$

Den 1. Ausdruck findet man aus f_p, indem für $a_i\,u_i\,a_x^2$ einsetzt, somit

$$a_p\,b_p\,c_p\,d_p\,e_p\,f_p = -2\,f \cdot \Theta_s\,a_s\,b_s\,c_\vartheta\,d_\vartheta + \frac{1}{3}\,a_s\,b_s\,c_s\,d_\vartheta\,e_\vartheta + a_t\,b_t\,c_t\,f^2 \quad \text{(Tabelle III, 139),}$$

mithin

$$S_{\left(u_i = a_i a_x^2\right)} = W = -\frac{1}{2} f^2 \cdot \Theta_s a_s b_s c_\vartheta d_\vartheta - \frac{1}{6} f a_s b_s c_s d_\vartheta e_\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2} f^2 \cdot \left(\frac{1}{6} S f a_\vartheta b_\vartheta - \frac{1}{6} \Delta a_s b_s c_s + \frac{1}{2} f a_t b_t c_t + \frac{1}{6} T f^3 - f a_t b_t c_t\right)$$

$$- \frac{1}{6} f \cdot \left(\frac{1}{4} S f^2 - \frac{1}{6} \Delta^2\right) \cdot \frac{1}{3} f \Delta \quad \text{(Tabelle III, 135 [hierin } u_i = a_i a_x^2\text{], ferner Tabelle III, 32 und 50).}$$

Schließlich nach Tabelle III, 36.

$$W = f^2 \cdot \left(-\frac{5}{144} S f^2 \Delta - \frac{1}{216} \Delta^3 - \frac{1}{6} \psi f - \frac{1}{72} T f^3\right).$$

Ich finde mithin diese Form, abgesehen von dem unwesentlichen Faktor $-\frac{1}{8} f^2$, übereinstimmend mit dem oben mit W bezeichneten Teil der Diskriminante:

$$W = \frac{4}{3} \psi f + \frac{1}{9} T f^3 + \frac{5}{18} S f^2 \Delta + \frac{1}{27} \Delta^3.$$

§ 14.

Anmerkung.

Ich ging aus von der Form

$$-f^2 p = \Theta^3 + \lambda Q^2 \pmod{u_x}.$$

$\Theta^3 + \lambda Q^2$ stellt eine Konnexschar (6, 6) dar, deren Hauptkoinzidenz gegeben ist durch

$$\Theta^3 + \lambda Q^2 = 0$$
$$u_x = 0.$$

Daß im vorliegenden Falle gerade der Konnex $\Theta^3 + \lambda Q^2$ eine Rolle spielt, liegt in folgendem begründet:

Wenn in einer binären Form 6. Grades zwei Wurzeln zusammenfallen, liegt eine spezielle Doppelverhältnisrelation vor.

Man stelle sich die Aufgabe:

Gegeben $f = a_x^3$ und ein Punkt x; man suche die Gerade u_x durch x, so daß die drei Schnittpunkte der C_3 auf u_x mit x das Doppelverhältnis μ bilden. Dann wird

$$\frac{\Theta^3}{Q^2} = -8\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2\,(2-\alpha)^2\,(1-2\,\alpha)^2}\,.$$

Demnach erhält man die Konnexschar

$$\Theta^3 + \lambda\,Q^2 = 0\,,$$

wie Clebsch-Lindemann S. 987 formuliert.

Es erscheint also pf^2 als spezieller Konnex dieser Schar, nämlich für $\alpha = +1$. In diesem Falle sind Integralkurven in x betrachtet die Punkte der Tangenten von p, in u betrachtet die Geraden durch die Punkte von f.

Ferner ist anzuführen:

Ist $R = S^3 - 6\,T^2 = 0$, d. h. besitzt die Kurve dritter Ordnung einen Doppel- oder Rückkehrpunkt, so versagt das Clebschsche Übertragungsprinzip. Wie dann noch die Form in Punktkoordinaten gebildet werden kann, soll im folgenden gezeigt werden.

Zweiter Teil.

Die Form p im Falle R = 0.

§ 14.

Die binär-ternäre Darstellung von p.

Oben ergab sich

$$D = R\,W^3\,f\,.$$

Wie schon bemerkt, wird die Aufstellung der Punktkoordinatenform hinfällig, sobald $R = 0$. Es sind hier, solange die C_3 nicht zerfällt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $R = 0$, $S \neq 0$, $T \neq 0$, die C_3 hat einen Doppelpunkt.
2. $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, die C_3 hat einen Rückkehrpunkt.

Im 1. Falle wird, wie die Plückerschen Formeln lehren,

$$p = u_\xi^2 u_q^4.$$

Im 2. Falle wird

$$p = u_\xi^3 u_q^3.$$

Dabei ist $u_\xi = 0$ die Gleichung des Doppelpunktes bezw. Rückkehrpunktes.

Im 1. Falle, wo $p = u_\xi^2 u_q^4$, zeige ich, daß die Punktkoordinatenform von u_q^4

$$D_q = \Omega^3 f,$$

wo Ω das Produkt der drei Wendetangenten der C_3 ist.

Zu diesem Zwecke ist u_q^4 rein darzustellen.[1])

Dies erreicht man durch die Parameterdarstellung der rationalen C_3 (Clebsch-Lindemann S. 883 f.)

$$\varrho\, x_i = a_\xi^3 \alpha_i.$$

Die a sind binäre, die α ternäre Symbole.

Ich erhalte dann die binäre-ternäre Form

$$a_\xi^3 u_\alpha.$$

$a_\xi^3 u_\alpha = 0$ ist, als ternäre Form betrachtet, die Gleichung des Kurvenpunktes mit dem Parameter ξ; binär gibt $a_\xi^3 u_\alpha = 0$ die drei Schnittpunkte der Geraden u_x mit der C_3.

Fallen zwei dieser Schnittpunkte zusammen, so wird u_x zur Tangente. Mithin ist die C_3 in Linienkoordinaten, d. h. die Form p gegeben durch die Diskriminante von $a_\xi^3 u_\alpha$:

$$u_q^4 = (a\,b)^2 (c\,d)^2 (a\,c) (b\,d)\, u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta.$$

Von dieser Form bilde ich später die Punktkoordinatenform.

Die Parameterdarstellung von q ist nach Clebsch-Lindemann S. 886 gegeben durch:

---

[1]) Mit Hilfe von Kovarianten der ternären kubischen Form gelingt dies ebensowenig, als sich, wenn die binäre Form a_x^3 eine Doppelwurzel hat, die einfache Wurzel ganz darstellen läßt.

$$\sigma u_i = (a\,b)\, a_\xi^2 b_\xi^2 \overline{\alpha\beta}_i,$$

mithin ist

$$(a\,b)\, a_\xi^2 b_\xi^2 (\alpha\,\beta\,x) = \Theta_x \vartheta_\xi^4.$$

$\Theta_x \vartheta_\xi^4 = 0$ stellt dar:

ternär die Gleichung der Tangente der C_3 im Punkte ξ,
binär die Gleichung der vier Berührungspunkte des vom Punkte x ausgehenden Tangentenbüschels.

§ 15.
Aufstellung der C_3.

Fallen zwei Tangenten vom Punkte x zusammen, so ist x entweder Punkt der Wendetangente oder Punkt der C_3; mithin liefert die Diskriminante der Form $\Theta_x \vartheta_\xi^4$ nach ξ gebildet, da sie vom 6. Grad in x wird, die C_3 und das Produkt der drei Wendetangenten.

Zur Vereinfachung der Rechnung setze ich $x = \bar{u}\,v$ und gehe später wieder auf $\bar{u}\,v = x$ zurück. Es wird dann

$$(\Theta\,u\,v)\,\vartheta_\xi^4 = \frac{1}{2}(a\,b)\, a_\xi^2 b_\xi^2\, u_\alpha\, v_\beta.$$

Man betrachte $2\,\vartheta_\xi^4$ als Funktionaldeterminante der zwei binären Formen

$$f = a_x^3 u_\alpha$$

und

$$\varphi = a_\xi^3 v_\alpha.$$

Ich erreiche damit, daß für die folgende Rechnung das System zweier binärer kubischer Formen (Gordans Inv. S. 330 ff.) genügt.

Nach S. 349 ebenda finde ich:

$$\Delta_F = -4\,\Omega\vartheta,$$

wo F eine S. 348 bezeichnete Form 4. Grades ist.

Nun ist nach Gordans Inv. S. 190

$$R_{\varkappa t + \lambda \Delta} = g^2 R,$$

wo

$$f = a_x^4 .$$

Daraus für $\varkappa = 0$ und $\lambda = 1$

$$R_{\Delta} = \frac{1}{9} j^2 R .$$

Diese Gleichung auf die Form Δ_F angewendet, gibt

$$R_{\Delta_F} = \frac{1}{9} j_F^2 \cdot R_F = \frac{12^2}{9} \Omega^4 \cdot (6 \cdot 12^2 \Omega^4 + 64 J^3 \Omega^3) ;^{1})$$

nun ist aber

$$R_{\Delta_F} = 2^{12} \Omega^6 R_{\vartheta} ,$$

da die Diskriminante vom 6. Grade in den Koeffizienten der Grundform ist.

Mithin ergibt sich durch Vergleichung

$$R_{\vartheta} = \frac{1}{2^3} \cdot \Omega (6 \cdot 12^2 \Omega + 64 J^3) .$$

Hierin ist

$$\Omega = (\Delta \nabla)(\Delta \Theta)(\nabla \Theta) .$$

Dabei ist gemäß obiger Definition

$$(f f)^2 = \Delta = (a b)^2 a_\xi b_\xi u_\alpha u_\beta = \Delta_\xi^2 u_\delta^2$$

$$(\varphi \varphi)^2 = \nabla = (a b)^2 a_\xi b_\xi v_\alpha v_\beta = \Delta_\xi^2 v_\delta^2$$

$$(f \varphi)^2 = \Theta = (a b)^2 a_\xi b_\xi u_\alpha v_\beta = \Delta_\xi^2 u_\delta v_\delta ,$$

demnach

$$\Omega = (\Delta \Delta_1)(\Delta \Delta_2)(\Delta_1 \Delta_2) u_\delta^2 v_{\delta_1}^2 u_{\delta_2} v_{\delta_2} ,$$

oder u v durch x ersetzt:

$$\Omega_x^3 = \frac{1}{6} (\Delta \Delta_1) \Delta \Delta_2)(\Delta_1 \Delta_2)(\delta \delta_1 x)(\delta \delta_2 x)(\delta_1 \delta_2 x) .$$

Ferner ist

$$J = (f \varphi)^3 = (a b)^3 u_\alpha v_\beta ,$$

---

[1]) In Gordans Inv. hat das 2. Glied der Resultante R irrtümlicherweise das negative Vorzeichen.

oder $\bar{u}\,v$ durch x ersetzt:

$$J = \frac{1}{2}(a\,b)^3 \cdot (\alpha\,\beta\,x) = \frac{1}{2} L_x,$$

mithin

$$R_\vartheta = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\Omega_x^3}{6} \cdot \left(\frac{6 \cdot 12^2\, \Omega_x^3}{6} + \frac{64}{2^3} (L_x)^3 \right).$$

Ω ergibt also das Produkt der drei Wendetangenten, $12^2\,\Omega - 8\,L^3$ stellt die C_3 dar, woraus folgt, daß L die Verbindungsgerade der drei Wendepunkte vorstellt.

Das letztere ersieht man auch folgendermaßen: Nach Clebsch-Lindemann S. 890 ist die binäre Form der drei Wendepunkte

$$\Delta_\xi^3 = (\alpha\,\beta\,\gamma) \cdot (a\,b)\,(c\,a)\,(b\,c)\,a_\xi\,b_\xi\,c_\xi.$$

Soll L_x Wendepunktsgerade sein, so ist notwendig, daß obige Form zum Vorschein kommt, wenn ich in L_x setze:

$$x_i = \gamma_i\, c_\xi^3.$$

Es wird

$$L_\gamma\, c_\xi^3 = \frac{1}{2} \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma) \cdot \left\{ (a\,b)^3 c_\xi^3 - (a\,c)^3 b_\xi^3 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma) \left\{ (a\,b)^2 c_\xi^2 + (a\,b)\,(a\,c)\,b_\xi c_\xi + (a\,c)^2 b_\xi^2 \right\} (c\,b)\,a_\xi,$$

da aber

$$(\alpha\,\beta\,\gamma)\,a_\xi\,(b\,c)\,(a\,b)^2 c_\xi^2 = \frac{1}{2} \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma)\,(a\,b)^2\,c_\xi^2 \left\{ (b\,c)\,a_\xi - (a\,c)\,b_\xi \right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\,(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(a\,b)^3\,c_\xi^3$$

$$L_\gamma\, c_\xi^3 = -\frac{1}{4} L_\gamma\, c_\xi^3 + \frac{1}{2}\,(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(a\,b)\,(a\,c)\,b_\xi\,c_\xi\,a_\xi\,(c\,b) - \frac{1}{4} L_\gamma\, c_\xi^3$$

$$L_\gamma\, c_\xi^3 = \frac{1}{3} \Delta_\xi^3 \quad \text{q. e. d.}$$

§ 16.

u_q^4 in Punktkoordinaten.

Es war

$$u_q^4 = (a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(a\,c)\,(b\,d)\,u_\alpha\,u_\beta\,u_\gamma\,u_\delta = (\Delta\Delta_1)^2\,u_\delta^2\,u_{\delta_1}^2,$$

wobei

$$\Delta_\xi^2\,u_\delta^2 = (a\,b)^2\,a_\xi\,b_\xi\,u_\alpha\,u_\beta.$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß die geränderte Diskriminante der zu der ternären Form u_q^4 äquivalenten binären Form $q_\varkappa^4$ (Clebschsches Übertragungsprinzip)

$$\underline{D_q = C \cdot \Omega^3\,f},$$

wo

$$\Omega = \frac{1}{6}\,(\Delta\Delta_1)\,(\Delta\Delta_2)\,(\Delta_1\Delta_2)\,(\delta\,\delta_1\,x)\,(\delta\,\delta_2\,x)\,(\delta_1\,\delta_2\,x)$$

und

$$f = 12^2\,\Omega + 8L^3.$$

Nach Gordans Inv. S. 192 ist

$$\underline{D_q = i_q^3 - 6\,j_q^2},$$

wo $i_q = (q\,q_1)^4$ und $j_q = (q\,q_1)^2\,(q\,q_2)^2\,(q_1\,q_2)^2$.

Die gesuchte Punktkoordinatenform von u_q^4 lautet mithin

$$\underline{D_q = [(q\,q_1\,x)^4]^3 - 6\,[(q\,q_1\,x)^2\,(q\,q_2\,x)^2\,(q_1\,q_2\,x)^2]^2}.$$

I.

Behandlung der binären Diskriminante D_q.

Nach dem Clebschschen Übertragungsprinzip setze ich

$$u_q^4 = (\Delta\Delta_1)^2\,u_\delta^2\,u_{\delta_1}^2 \sim (\Delta\Delta_1)^2\,\delta_\varkappa^2\,\delta_{1\varkappa}^2 = q_\varkappa^4,$$

dann wird die 2. Polare von $q_\varkappa^4$ nach λ

$$q_\lambda^2 = (\Delta\Delta_1)^2\,\delta_\varkappa^2\,\delta_\lambda^2 - \frac{1}{3}\,(\Delta\Delta_1)^2\,(\delta\,\delta_1)^2\,(\varkappa\,\lambda)^2$$

Berechnung von

$$\underline{i_q = (q\,q_1)^4}:$$

$$(q\,q_1)^4 = (\Delta\Delta_1)^2\,(\delta\,q)^2\,(\delta_1\,q)^2.$$

Die rechte Seite erhalte ich auch, wenn ich in der Polaren q_λ $\varkappa$ durch δ und λ durch δ_1 ersetze und den Klammerfaktor $(\Delta\Delta_1)^2$ hinzufüge:

$$(\Delta\Delta_1)^2(\delta q)^2(\delta_1 q)^2 = (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2(\delta\delta_2)^2(\delta_1\delta_3)^2 - \frac{1}{3}(\Delta\Delta_1)^2(\delta\delta_1)^2\cdot(\Delta_2\Delta_3)^2(\delta_2\delta_3)^2,$$

oder wenn ich vorerst die Bezeichnungen einführe:

$$(\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2(\delta\delta_2)^2(\delta_1\delta_3)^2 = t,$$
$$(\Delta\Delta_1)^2(\delta\delta_1)^2 = \mathfrak{s},$$

dann wird

$$\underline{i_q = t - \frac{1}{3}\mathfrak{s}^2.}$$

Berechnung von

$$\underline{j_q = (q\,q_1)^2(q\,q_2)^2(q_1\,q_2)^2:}$$

Es ist $j_q = (\mathfrak{h}\,q)^4$, wenn $\mathfrak{h} = (q\,q_1)^2\cdot q_\varkappa^2\,q_{1\varkappa}^2$. Man erhält $\mathfrak{h}$, wenn man in der Polaren q_λ^2 λ durch q_1 ersetzt;

$$\mathfrak{h} = (q\,q_1)^2 = (\Delta\Delta_1)^2\,\delta_\varkappa^2\,(\delta_1 q)^2 - \frac{1}{3}\mathfrak{s}\cdot q.$$

Den 1. Ausdruck rechts erhält man aus der Polaren q_λ^2 für $\lambda = \delta$, nämlich:

$$(\Delta\Delta_1)^2\delta_\varkappa^2(\delta_1 q)^2 = (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2\cdot\delta_\varkappa^2(\delta_3\delta_1)^2\delta_{2\varkappa}^2 - \frac{1}{3}\mathfrak{s}\cdot q,$$

mithin

$$\underline{\mathfrak{h} = (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2\cdot(\delta_1\delta_3)^2\delta_\varkappa^2\delta_{2\varkappa}^2 - \frac{2}{3}\mathfrak{s}\cdot q.}$$

Daraus ergibt sich

$$(\mathfrak{h}\,q)^4 = \left[(\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2(\delta_1\delta_3)^2\delta_\varkappa^2\delta_{2\varkappa}^2 - \frac{2}{3}\mathfrak{s}\cdot q, q\right]^4$$
$$= (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2(\delta_1\delta_3)(\delta q)^2(\delta_2 q)^2 - \frac{2}{3}\mathfrak{s}\cdot(q\,q_1)^4.$$

Den 1. Ausdruck rechts erhält man wieder aus der Polaren q_λ^2 für $\varkappa = \delta$ und $\lambda = \delta_2$

$$(\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2(\delta_1\delta_3)^2(\delta q)^2(\delta_2 q)^2$$
$$= (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)^2(\Delta_4\Delta_5)^2(\delta_1\delta_3)^2\cdot(\delta_4\delta)^2(\delta_2\delta_5)^2 - \frac{1}{3}\mathfrak{s}\cdot(\Delta\Delta_1)^2(\Delta_2\Delta_3)(\delta_1\delta_3)^2(\delta\delta_2)^2$$
$$= \mathfrak{r} - \frac{1}{3}\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{t}. \qquad \text{(Der 1. Ausdruck } = \mathfrak{r} \text{ gesetzt.)}$$

Demnach

$$j_q = \mathfrak{r} - \frac{1}{3}\mathfrak{s}\mathfrak{t} - \frac{2}{3}\mathfrak{s}\cdot\left(\mathfrak{t} - \frac{1}{3}\mathfrak{s}^2\right)$$

$$\underline{j_q = \mathfrak{r} - \mathfrak{s}\mathfrak{t} + \frac{2}{9}\mathfrak{s}^3.}$$

Es ergibt sich schließlich:

$$\underline{D_q = \mathfrak{t}^3 - 6\mathfrak{r}^2 + 12\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{t} - 7\mathfrak{t}^2\mathfrak{s}^2 - \frac{8}{3}\mathfrak{r}\mathfrak{s}^3 + 3\mathfrak{s}^4\mathfrak{t} - \frac{1}{3}\mathfrak{s}^6,}$$

worin

$$\mathfrak{r} = (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\Delta_5\Delta_6)^2(\delta_1\delta_5)^2(\delta_2\delta_4)^2(\delta_3\delta_6)^2$$
$$\mathfrak{t} = (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\delta_1\delta_3)^2(\delta_2\delta_4)^2$$
$$\mathfrak{s} = (\Delta_1\Delta_2)^2(\delta\delta_1)^2.$$

II.

Die Übertragung der Diskriminante ins Ternäre.

$$\underline{\mathfrak{s} = (\Delta_1\Delta_2)^2(\delta_1\delta_2)^2 \sim (\Delta_1\Delta_2)^2(\delta_1\delta_2 x)^2.}$$

Um diese Form zu reduzieren, ersetze ich x durch $\overline{uv}$ und führe so die S. 30 bereits definierten binär-ternären Formen $\Delta_\xi^2 u_\delta^2 = \Delta$, $\Delta_\xi^2 v_\delta^2 = V$ und $\Delta_\xi^2 u_\delta v_\delta = \Theta$ ein. Hiebei treten die Invarianten des Simultansystems von f und φ auf. Von den zwischen ihnen bestehenden Relationen wird im folgenden wiederholt Gebrauch gemacht (s. Gordans Invariantentheorie S. 342 ff.).

$$(\Delta_1\Delta_2)^2(\delta_1\delta_2 x)^2 = (\Delta_1\Delta_2)^2(\delta_1\delta_2\overline{uv})^2$$
$$= 2(\Delta_1\Delta_2)^2\cdot\left(u_{\delta_1}^2 v_{\delta_2}^2 - u_{\delta_1}v_{\delta_1}u_{\delta_2}v_{\delta_2}\right)$$
$$= 2(\Delta V)^2 - 2(\Theta\Theta_1)^2$$
$$= 2\left(A_{\Delta V} - A_{\Theta\Theta}\right) = J^2$$

(Gordans Invariantentheorie S. 344),

mithin

$$\underline{\mathfrak{S} \sim J^2}.$$

$$\underline{t = (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\delta_1\delta_3)^2(\delta_2\delta_4)^2 \sim (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\delta_1\delta_3 x)^2(\delta_2\delta_4 x)^2}$$

$$\sim (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2\left(\delta_1\delta_3\overline{uv}\right)^2\cdot\left(\delta_2\delta_4\overline{uv}\right)^2$$

$$\sim (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2\cdot\left(u^2_{\delta_1}v^2_{\delta_3} - 2u_{\delta_1}v_{\delta_1}u_{\delta_3}v_{\delta_3}\right.$$

$$\left. + v^2_{\delta_1}u^2_{\delta_3}\right)\left(u^2_{\delta_2}v^2_{\delta_4} - 2u_{\delta_2}v_{\delta_2}u_{\delta_4}v_{\delta_4} + v^2_{\delta_2}u^2_{\delta_4}\right).$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man, nachdem man gleiche Glieder zusammengefaßt hat:

$$t \sim 2A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla} - 8A_{\nabla\Theta}A_{\Delta\Theta} + 2A^2_{\Delta\nabla} + 4A^2_{\Theta\Theta},$$

hievon subtrahiere man

$$8J\Omega = 2A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla} - 8A_{\nabla\Theta}A_{\Delta\Theta} - 2A^2_{\Delta\nabla} + 8A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\nabla}$$

(Gordans Invariantentheorie S. 346 VIII).

Es bleibt übrig:

$$4A^2_{\Delta\nabla} - 8A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\nabla} + 4A^2_{\Theta\Theta}$$

$$= 4\cdot\left(A_{\Delta\nabla} - A_{\Theta\Theta}\right)^2$$

$$= J^2$$

somit

$$\underline{t \sim 8J\Omega + J^4}.$$

Schließlich

$$\underline{r = (\Delta_1\Delta_2)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\Delta_5\Delta_6)^2\cdot(\delta_1\delta_5)^2(\delta_2\delta_4)^2(\delta_3\delta_6)^2}$$

$$\underline{\sim (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\Delta_5\Delta_6)^2\cdot(\delta_1\delta_5 x)^2(\delta_2\delta_4 x)^2(\delta_3\delta_6 x)^6}$$

$$= (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\Delta_5\Delta_6)^2\cdot\left(\delta_1\delta_5\overline{uv}\right)^2\left(\delta_2\delta_4\overline{uv}\right)^2\left(\delta_3\delta_6\overline{uv}\right)^2$$

$$= (\Delta\Delta_1)^2(\Delta_3\Delta_4)^2(\Delta_5\Delta_6)^2\left(u^2_{\delta_1}v^2_{\delta_5} - 2u_{\delta_1}v_{\delta_1}u_{\delta_5}v_{\delta_5} + v^2_{\delta_1}u^2_{\delta_5}\right)\left(u^2_{\delta_2}v^2_{\delta_4}\right.$$

$$\left. - 2u_{\delta_2}v_{\delta_2}u_{\delta_4}v_{\delta_4} + v^2_{\delta_2}u^2_{\delta_4}\right)\cdot\left(u^2_{\delta_3}v^2_{\delta_6} - 2u_{\delta_3}v_{\delta_3}u_{\delta_6}v_{\delta_6} - v^2_{\delta_3}u^2_{\delta_6}\right).$$

Die gleichen Glieder dieses Produkts lassen sich durch Abzählen leicht finden. Man hat

$$t \sim 2A^3_{\Delta\nabla} - 12A_{\Delta\nabla}A_{\Theta\Delta}A_{\Theta\nabla} + 6A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla}A_{\Delta\nabla}$$

$$+ 24A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\Theta}A_{\nabla\Theta} - 6A_{\Delta\Delta}A^2_{\Theta\nabla} - 6A_{\nabla\nabla}A^2_{\Delta\Theta} - 8A^3_{\Theta\Theta}.$$

Subtrahiert man hievon

$$J^6 = 8A_{\Delta V}^3 - 24A_{\Theta\Theta}A_{\Delta V}^2 + 24A_{\Delta V}A_{\Theta\Theta}^2 - 8A_{\Theta\Theta}^3,$$

ferner

$$12\Omega J^3 = -6A_{\Delta V}^3 + 24A_{\Theta\Theta}A_{\Delta V}^2 - 24A_{\Delta V}A_{\Theta\Theta}^2$$
$$-24A_{\Delta V}A_{\Theta V}A_{\Theta\Delta} + 24A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\Theta}A_{V\Theta} - 6A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\Delta}A_{VV}$$
$$+6A_{\Theta\Theta}A_{\Delta V}^2 + 6A_{\Delta\Delta}A_{VV}A_{\Delta V},$$

so bleibt übrig:

$$12A_{\Delta V}A_{\Theta\Delta}A_{\Theta V} - 6A_{\Delta\Delta}A_{\Theta V}^2 - 6A_{\Delta\Theta}^2A_{VV} + 6A_{\Theta\Theta}A_{\Delta\Delta}A_{VV}$$
$$-6A_{\Theta\Theta}A_{\Delta V}^2$$
$$= 12\Omega^2 \text{ (Gordans Invariantentheorie S. 344)},$$

mithin

$$\underline{r \sim 12\Omega^2 + 12J^3\Omega + J^6.}$$

Zusammenstellung.

$$\mathfrak{s} \sim J^2$$
$$t \sim 8J\Omega + J^4$$
$$r \sim 12\Omega^2 + 12J^3\cdot\Omega + J^6.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung

$$D_q = t^3 - 6r^2 + 12r\mathfrak{s}t - 7t^2\mathfrak{s}^2 - \frac{8}{3}r\mathfrak{s}^3 + 3\mathfrak{s}^4t - \frac{1}{6}\mathfrak{s}^6 \text{ (S. 34)}$$

ein, so erhält man für die Punktkoordinatenform von q folgenden Ausdruck:

$$D_q = c_0\Omega^4 + c_1J^3\Omega^3 + c_2J^6\Omega^2 + c_3J^9\Omega + c_4J^{12}.$$

Die Ausrechnung zeigt, daß die Koeffizienten $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, hingegen $c_0 = -\underline{6\cdot 12^2}$, $c_1 = 2^9 - 12^3 + 12^2\cdot 8 = -\underline{64}$.

Somit

$$D_q = -6\cdot 12^2\cdot\Omega^4 - 64\Omega^3J^3$$
$$= -\Omega^3\cdot(6\cdot 12^2\cdot\Omega + 64J^3)$$

oder, wenn ich wieder $\overline{u\,v}$ durch x ersetze,

$$D_q = -c \cdot \left(\frac{\Omega_x^3}{6}\right)^3 \cdot \left(6 \cdot 12^2 \cdot \frac{\Omega_x^3}{6} + \frac{64}{2^3}(L_x)^3\right),$$

wie oben angekündigt war.

Anmerkung: Da nur ein Zahlenfaktor, keine Invariante in die eben aufgestellte Formel eintritt, so schließe ich, daß diese Formel auch für den 2. Fall genügt, wo $S = 0$ und $T = 0$, die C_3 demnach einen Rückkehrpunkt besitzt.

Dritter Teil.

Zur Geometrie der Kurve $p = 0$.

§ 17.

Die zu $p = 0$ adjungierte Kurve $s = 0$.

Die Kurve $p = 0$ hat 9 Wendetangenten. Es folgt dies schon aus der Formel Tab. III, 177

$$\Delta_p = (p\,p_1\,p_2)^2 = \frac{4}{3^3 \cdot 5}\,s^4 + p \cdot \left(\frac{7}{5^2 \cdot 3^2}\,S\,p - \frac{2^3}{5^2}\,s\,t\right).$$

Man sieht, daß für $\Delta_p = 0$, $p = 0$

$$s^4 = 0.$$

Die $6 \cdot 12 = 72$ gemeinsamen Tangenten der Grundkurve und der Hesseschen Kurve zerfallen in Rückkehrtangenten und singuläre Tangenten. Infolge $s^4 = 0$ fallen mindestens je 4 zusammen, so daß also höchstens 18 gemeinsame Tangenten existieren würden. Eine solche würde also vierfach zu zählen sein. Eine Rückkehrtangente zählt als einfache Tangente, eine Doppeltangente als sechsfache, eine Wendetangente als achtfache, und da dies abgesehen von höheren Singularitäten die einzigen Möglichkeiten sind, so folgt, daß die 18 Tangenten je paarweise zusammenfallen müssen. Eine der 9 verschiedenen gemeinsamen Tangenten zählt mithin als achtfache gemeinsame Tangente und ist also Wendetangente von $p = 0$. Zugleich ist hieraus ersichtlich, daß

s adjungierte Kurve ist, da die Kurve $s = 0$ die Wendetangenten berührt.

Kurventheoretisch kann also die Relation

$$(p\, p_1\, p_2)^2 = c s^4 + A p$$

als charakteristische Relation für die Kurve $p = 0$ gebraucht werden, wo $s = 0$ als eine allgemeine Kurve dritter Klasse zu betrachten ist.

Im folgenden soll die Identität des Integrals längs der Kurve $p = 0$ mit dem längs der Grundkurve $f = 0$ gezeigt werden. Hiebei wird nach Hermites Beispiel (s. Clebsch-Lindemann) von der zwischen den Kontravarianten des Systems bestehenden Relation Gebrauch gemacht, die im nächsten Paragraphen abgeleitet werden soll.

§ 18.

Die Relation zwischen den Kontravarianten.

Das von Gordan aufgestellte System enthält vier Kovarianten:

$$f,\ \Delta,\ q,\ (f\, \Delta\, q),$$

ebenso vier Kontravarianten

$$s,\ t,\ p,\ (p\, s\, t).$$

Nach den Annalen 6 (Clebsch-Gordan) kennt man den vollständigen Dualismus der Formen in x und u; es ist deshalb ersichtlich, daß an Stelle der Kombinante ψ (Tab. III, 37) in dualistischem Sinn eine auf p, s, t reduzierbare Form tritt. Diese lautet nach den Annalen 6 S. 512:

$$u^6_\Phi = -\frac{1}{2} R p + S t^2 - \frac{1}{3} S^2 s t + \frac{1}{6} S T s^2,$$

sie ist also auf p, s und t zurückführbar.

Wie zwischen f, Δ, ψ und Ω eine Relation besteht (Clebsch-Lindemann S. 640):

$$24\, \Omega^2 = 384 \psi^3 - 12 \psi\, S_{\Delta, -t} + 2 T_{\Delta, -t},$$

so wird auch zwischen p, s, t und (p s t) eine solche bestehen.

Setzt man deshalb:

$$\varepsilon\,(p\,s\,t)^2 = R\,p^3 + A\,p^2 + B\,p + C,$$

so sind die A, B, C Formen in s und t eindeutig bestimmt, ε ein Zahlenfaktor.

Der δ-Prozeß gibt:

$$0 = 3p^2 \cdot \frac{4}{3} s^2 \cdot R + 2A\,p \cdot \frac{4}{3} s^2 + p^2 \delta A + \frac{4}{3} B s^2 + p\,\delta B + \delta C.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten gleichhoher Potenzen von p erhält man

$$\delta A + 4\,s^2 R = 0,$$

$$\delta B + \frac{8}{3} A s^2 = 0,$$

$$\delta C + \frac{4}{3} B s^2 = 0.$$

A hat 16 Symbole f und den Grad 6 in u.

Setzt man

$$A = a_1\,s^2 \cdot S\,T + a_2\,s\,t\,S^2 + a_3\,t^2 \cdot T,$$

deltaiert und benützt die 1. der obigen Gleichungen, so findet man durch Gleichsetzen gleichhoher Potenzen von s und t

$$a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -6,$$

mithin

$$A = -s^2 \cdot S\,T + 2\,s\,t\,S^2 - 6\,t^2\,T = 6\,S_{12\,(t,-s)}.$$

Ebenso

$$B = -9t^4 - 5\,S\,t^2 s^2 + 4\,T\,s^3\,t - \frac{1}{12} S^2 s^4 = 9\,G_{1\,(t,-s)} \cdot t - G_{2\,(t,-s)}\,s$$

und

$$C = -\frac{4}{3} t^3 s^3 + \frac{2}{3} t\,s^5\,S - \frac{4}{9} s^6\,T = -\frac{4}{3}\,G_{1\,(+t,-s)} \cdot s^3.$$

Dann ist, da $\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{18}$ durch Anwendung des Identitätssatzes auf $(p\,s\,t)^2$ gefunden wird,

$$(p\,s\,t)^2 = -\frac{1}{18} R\,p^3 + \frac{1}{3} S_{12\,(t,-s)} \cdot p^2 - \frac{1}{18}\left(9\,G_{1\,(t,-s)} \cdot t - G_{2\,(t,-s)}\,s\right) p + \frac{2}{27}\,G_{1\,(t,-s)}\,s^3.$$

§ 19.

Transformation des Integrals längs $p = 0$.

Die Kurve $p = 0$ hat das Geschlecht 1, also ein einziges endliches Integral.

$s = 0$ ist, wie schon oben gezeigt, eine adjungierte Kurve dritter Klasse, also heißt das überall endliche Integral:

$$U = \int_u^v \frac{u_s^3 (\varkappa\, u\, du)}{u_p^5\, \varkappa_p},$$

wo $\varkappa$ eine beliebige Größe und p stets gleich Null zu setzen ist.

Es ist dieses Integral bis auf einen Faktor gleich

$$\int \frac{(c\, x\, dx)}{a_x^2 \cdot a_c},$$

da sich beim Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten das Integral nicht ändert; es ist bei eindeutiger Transformation invariant.

Ich zeige dies folgendermaßen: $\varkappa$ ist in U beliebig; setzt man

$$\varkappa_i = (s\, t)_i,$$

so wird

$$U = \int_u^v \frac{u_s^3 (s\, t\, u\, du)}{(p\, s\, t)} = \int_u^v \frac{s\,(u_s\, du_t - u_t\, du_s)}{(p\, s\, t)} = \frac{1}{3} \int_u^v s\, \frac{s\, dt - t\, ds}{(p\, s\, t)};$$

nun ist für $p = 0$

$$(p\, s\, t)^2 = \frac{2}{27}\, G_{1\,(t, -s)} \cdot s^3,$$

also

$$(p\, s\, t) = \frac{1}{3}\, s \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{G_{1\,(t, -s)} \cdot s},$$

mithin

$$U = \frac{1}{3} \int \frac{s\, dt - t\, ds}{\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{G_{1\,(t, -s)} \cdot s}},$$

setzt man

$$s = \lambda, \qquad t = \varkappa$$
$$ds = d\lambda, \quad dt = \delta\varkappa,$$

so ergibt sich

$$U = \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{\lambda\, d\varkappa - \varkappa\, d\lambda}{\sqrt{\lambda G_{1(\varkappa\lambda)}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{\lambda\, d\varkappa - \varkappa\, d\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot \left(\varkappa^3 - \frac{1}{2} S \varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3} T\lambda^3\right)}}.$$

Tabelle.

I.

Das vollständige System der ternären kubischen Form a_x^3.

Annalen I.

Ordnung in den Koeffizienten:

0. u_x.

1. $f = a_x^3$.

2. $\Theta = (a\,b\,u)^2\, a_x\, b_x$.

3. $(f\,\Theta\,u) = (a\,b\,u)^2\,(a\,c\,u)\,b_x\,c_x^2$; $u_s^3 = (a\,b\,c)\,(a\,b\,u)\,(b\,c\,u)\,(a\,c\,u)$

   $\Delta = \alpha_x^3 = (a\,b\,c)^2\, a_x\, b_x\, c_x$.

4. $H = H_x^2\, u_\eta^2 = (a\,\alpha\,u)^2\, a_x\, \alpha_x$; $N = N_x^4\, u_n = (a\,\alpha\,u)\, a_x^2\, \alpha_x^2$;

   $u_p^6 = (a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(a\,c\,u)\,(b\,d\,u)$; $S = a_s^3 = (a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(b\,c\,d)\,(a\,c\,d)$.

5. $\Theta_s\, u_\vartheta^2\, u_s^2\; \Theta_x = u_s^2\, a_s\, b_x\, (a\,b\,u)^2$; $u_s^2\, a_s\, (a\,b\,u)\, a_x\, b_x^2$;

   $f_s\, f_{1s} = a_s\, b_s\, u_s\, a_x^2\, b_x^2$; $\Theta_s^2\, u_\vartheta^2\, u_s = u_t^3 = t$.

6. $a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, (b\,c\,u)\, c_x^2\, u_s$; $\Theta_s\, (\Theta\, f\, u) = u_s^2\, a_s\, (a\,b\,u)^2\, (b\,c\,u)\, c_x^2$;

   $K = K_x^2\, u_\varkappa^2 = (\alpha\,\beta\,u)^2\, \alpha_x\, \beta_x$; $T = a_t^3 = \Theta_s^2\, a_\vartheta^2\, a_s$.

7. $\Theta_t u_\vartheta^2 u_t^2 \Theta_x = u_t^2 a_t (a b u)^2 b_x$; $f_t f_{1t} = a_t b_t a_x^2 b_x^2 u_t$;
$a_t b_x^2 (a b u) a_x u_t^2$; $(s p x) u_s^2 u_p^5$.

8. $q_x^6 = a_t b_t c_t a_x^2 b_x^2 c_x^2$; $a_t b_t u_t a_x^2 b_x (b c u) c_x^2$;
$u_t^2 a_t (a b u)^2 (b c u) c_x^2$; $(s t x) u_s^2 u_t^2$.

9. $(a q u) a_x^2 q_x^5$; $(p t x) u_p^5 u_t^2$; $(s t x) a_t u_t u_s^2 a_x^2$.

10. $(s t x) a_t b_t a_x^2 b_x^2 u_s^2$; $u_s^2 u_t a_t (s t x) (a b u) b_x^2$.

11. $(\alpha q u) \alpha_x^2 q_x^5$.

12. $(a \alpha q) a_x^2 \alpha_x^2 q_x^5$; $(s t p) u_s^2 u_t^2 u_p^5$.

II.

Polaren von Formen.

Polarisierbar sind die Formen:

1. $f = a_x^3$.
2. $\Delta = \alpha_x^3$.
3. $s = a_\vartheta u_\vartheta (a \Theta u)^2$.
4. $t = \alpha_\vartheta u_\vartheta (\alpha \Theta u)^2 = \Theta_s^2 u_\vartheta^2 u_s$.
5. $\Theta_t^2 u_\vartheta^2 u_t$.
6. $\Theta_x^2 u_\vartheta^2$.
7. $H_x^2 u_\eta^2$.
8. $K_x^2 u_\varkappa^2$.
9. $a_s u_s^2 a_x^2$.
10. $\Delta_s u_s^2 \Delta_x^2$.
11. $a_t u_t^2 a_x^2$.

Polaren oder Glieder von Polaren.

1. $\Theta_x^2 a_x a_y a_\vartheta u_\vartheta = \frac{1}{3} u_y \Delta.$

2. $\Theta_x^2 a_y^2 a_\vartheta u_\vartheta = \frac{2}{3} u_y \Delta_y - \frac{1}{3} u_x \Delta_y^2 + \frac{1}{3} (s\,x\,y)^2.$

3. $\Theta_y (\Theta\,a\,v)\, a_\vartheta u_x a_x = \frac{1}{2} (\Delta\,u\,v)\, \Delta_x \Delta_y + \frac{1}{2} u_s v_s (s\,x\,y).$

4. $\Theta_y^2 a_\vartheta u_\vartheta \alpha_x^2 = \frac{1}{6} S f_y u_y + \frac{1}{3} S f_y^2 u_x - 2 a_y^2 a_s b_s u_s + (t\,x\,y)^2 u_t.$

5. $(a\,b\,c)\, a_x^2 b_y^2 c_z^2 = \frac{1}{3} (s\,x\,y)\,(s\,y\,z)\,(s\,x\,z) + \frac{2}{3} \alpha_x \alpha_y \alpha_z (x\,y\,z).$

6. $(\vartheta \vartheta_1 z)^2\, \Theta_x^2\, \Theta_{1x}^2 = \frac{4}{3} f_z^2 \Delta.$

7. $(\vartheta \vartheta_1 z)^2\, \Theta_x^2\, \Theta_{1y}^2 = \frac{5}{18} S (x\,y\,z)^2 - \frac{2}{3} a_s a_z^2 (s\,x\,y)^2$
$+ \frac{2}{3} a_z^2 a_y \Delta_y \Delta_x^2 + \frac{2}{3} a_z^2 a_x \Delta_y^2 \Delta_x.$

8. $(\vartheta \vartheta_1 z)^2\, \Theta_x\, \Theta_y\, \Theta_{1x}\, \Theta_{1y} = -\frac{5}{36} S (x\,y\,z)^2 + \frac{1}{3} a_s a_z^2 (s\,x\,y)^2$
$+ \frac{2}{3} a_z^2 a_y \Delta_y \Delta_x^2 + \frac{2}{3} a_z^2 a_x \Delta_y^2 \Delta_x.$

9. $(\vartheta \vartheta_1 x)^2\, \Theta_x^2\, \Theta_{1y}^2 = -\frac{2}{3} a_s a_x^2 (s\,x\,y)^2$
$+ \frac{2}{3} a_x^2 a_y \Delta_y \Delta_x^2 + \frac{2}{3} a_x^3 \Delta_y^2 \Delta_x.$

10. $(\vartheta \vartheta_1 x)^2\, \Theta_x\, \Theta_y\, \Theta_{1x}\, \Theta_{1y} = +\frac{1}{3} a_s a_x^2 (s\,x\,y)^2$
$+ \frac{2}{3} a_x^2 a_y \Delta_y \Delta_x^2 + \frac{2}{3} a_x^3 \Delta_y^2 \Delta_x.$

11. $a_s b_s c_s a_x^2 b_x^2 c_y^2 = \frac{1}{4} S a_y^2 a_x b_x^3 - \frac{1}{6} \Delta_y^2 \Delta_x \Delta_{1x}^3$
$- \frac{1}{12} (\vartheta\,x\,y)^2\, \Theta_x^2\, S + \frac{1}{2} a_t (t\,x\,y)^2 a_x^2.$

12. $a_s\, b_s\, c_s\, a_x^2\, b_x\, b_y\, c_x\, c_y = \frac{1}{4} S\, a_y^2\, a_x\, b_x^3 - \frac{1}{6} \Delta_y^2\, \Delta_x\, \Delta_{1x}^3$

$$- \frac{1}{12} (\vartheta\, x\, y)^2\, \Theta_x^2\, S.$$

13. $\Theta_s\, \Theta_x\, u_\vartheta\, v_\vartheta\, u_s^2 = (\Theta_s)_v - \frac{1}{4} (x\, \overline{u\, v}\, t)\, u_t^2.$

14. $\Theta_s\, \Theta_x\, v_\vartheta^2\, u_s^2 = (\Theta_s)_v^2 - \frac{1}{2} (x\, \overline{u\, v}\, t)\, u_t\, v_t + \frac{2}{9} S\, (a\, u\, v)^2\, a_x.$

15. $\Theta_t\, \Theta_x\, u_\vartheta\, v_\vartheta\, u_t^2 = (\Theta_t)_v - \frac{S}{24} (x\, \overline{u\, v}\, s).$

16. $\Theta_t\, \Theta_x\, v_\vartheta^2\, u_t^2 = (\Theta_t)_v^2 - \frac{S}{12} (x\, \overline{u\, v}\, s)\, u_s\, v_s + \frac{2}{9} T\, (a\, u\, v)^2\, a_x.$

17. $v_p\, u_p^5 = (\Theta\, \Theta_1 u)\, (\Theta\, \Theta_1 v)\, u_\vartheta^2\, u_{\vartheta_1}^2$

$$= (\Theta\, \Theta_1 u)^2\, u_\vartheta^2\, u_{\vartheta_1}\, v_{\vartheta_1}.$$

18. $v_p^2\, u_p^4 = (\Theta\, \Theta_1 v)^2\, u_{\vartheta_1}^2\, u_\vartheta^2 - \frac{2}{5} (H\, u\, v)^2\, u_\eta^2$

$$= (\Theta\, \Theta_1 u)^2\, u_\vartheta^2\, v_{\vartheta_1}^2 + \frac{3}{5} (H\, u\, v)^2\, u_\eta^2.$$

19. $v_p^3\, u_p^3 = (\Theta\, \Theta_1 u)^2\, u_\vartheta\, v_\vartheta\, v_{\vartheta_1}^2 - \frac{1}{5} (H\, u\, v)^2\, u_\eta\, v_\eta.$

20. $u_p^2\, v_p^2\, w_p^2 = (\Theta\, \Theta_1 u)^2\, v_\vartheta^2\, w_{\vartheta_1}^2 - \frac{7}{30} S\, (u\, v\, w)^2$

$$- \frac{1}{5} a_s\, (a\, u\, w)^2\, v_s^2 - \frac{1}{5} a_s\, (a\, u\, v)^2\, w_s^2 + \frac{4}{5} a_s\, (a\, v\, w)^2\, u_s^2.$$

21. $\left[(f\, \Theta u)\ \Theta_x\, u_\vartheta^2\right]_v^2 = (f\, \Theta u)\, \Theta_x\, v_\vartheta^2 - \frac{1}{3} v_x\, (\Delta\, u\, v).$

III.

Auf das System reduzierte Formen.

1. $(f\,\Theta u)^2 = \frac{1}{3}\,s\,u_x$.

2. $(f\,H u) = (\vartheta\,s\,x)\,\Theta_x^2\,u_s^2\,u_\vartheta$ (s. System 5).

3. $(f\,H u)^2 = \Theta_s$ (s. System 5).

4. $(\Theta\,\Theta_1 u)^2 = u_p^6$ (s. System 4).

5. $(\Theta\,H u)^2 = \frac{1}{3}\,s^2$.

6. $(\Theta\,K u)^2 = \frac{2}{3}\,s\,t - \frac{1}{6}\,S\,p$.

7. $(H\,H u)^2 = \frac{2}{3}\,s\,t - \frac{1}{6}\,S\,p$.

8. $(H\,K u)^2 = t^2 - \frac{1}{3}\,T\,p$.

9. $(K\,K u)^2 = \frac{2}{3}\,S\,s\,t - \frac{s^2}{12}\,p - \frac{4}{9}\,T\,s^2$.

10. $(f\,\Delta u)^2 = H = f_s - \frac{1}{6}\,S\,u_x^2$ (Aronholdsche Formel).

11. $(f\,\Delta u)^3 = 0$.

12. $(\Delta\,\Delta u)^2 = K = 2\,f_t - \frac{1}{6}\,S\,\Theta - \frac{1}{3}\,T\,u_x^2$

$$= -2\,\Delta_s + \frac{1}{2}\,S\,\Theta + \frac{1}{3}\,T\,u_x^2.$$

13. $\delta f = \Delta$.

14. $\delta\,\Delta = \frac{1}{2}\,S\,f$.

15. $\delta\,s = 3\,t$.

16. $\delta\,t = \frac{5}{6}\,S\,s$.

17. $\delta\,S = 4\,T$.

18. $\delta\,T = S^2$.

19. $\delta\,p = \frac{4}{3}\,s^2$.

20. $\delta\,\Theta = 2\,H.$

21. $\delta\,H = K + \frac{S}{2}\,\Theta.$

22. $\delta\,K = S\,H.$

23. $f_\vartheta = \frac{1}{3}\,\Delta\,u_x.$

24. $f_\vartheta^2 = \Delta$ (s. System 3).

25. $f_\eta = a_s\,b_s\,u_s\,a_x^2\,b_x^2 - S\,f\,u_x.$

26. $f_\eta^2 = \frac{S}{6}\,f.$

27. $f_\varkappa = a_t\,b_t\,a_x^2\,b_x^2\,u_t - \frac{1}{18}\,S\,\Delta\,u_x - \frac{1}{3}\,T\,f\,u_x.$

28. $f_\varkappa^2 = \frac{1}{3}\,T\,f - \frac{1}{6}\,S\,\Delta.$

29. $f_s = H + \frac{1}{6}\,S\,u_x^2.$

30. $f_s^2 = \frac{1}{3}\,S\,u_x.$

31. $f_s\,f_{1s} = a_s\,b_s\,u_s\,a_x^2\,b_x^2$ (System 5) $= -\frac{1}{2}\,\Delta_\vartheta + \frac{1}{4}\,S\,f\,u_x$

$= f_\eta + \frac{S}{6}\,f\,u_x.$

32. $f_s\,f_{1s}\,f_{2s} = a_s\,b_s\,c_s\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2 = \frac{1}{4}\,S\,f^2 - \frac{1}{6}\,\Delta^2.$

33. $f_t = \frac{1}{2}\,K + \frac{1}{12}\,S\,\Theta + \frac{1}{6}\,T\,u_x^2 = \frac{1}{3}\,T\,u_x^2 + \frac{1}{3}\,S\,\Theta - \Delta_s.$

34. $f_t^2 = \frac{1}{3}\,T\,u_x.$

35. $a_t\,b_t\,a_x^2\,b_x^2\,u_t$ (Form des Systems 7).

36. $a_t\,b_t\,c_t\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2$ (Form des Systems) $= q_x^6 = -\frac{2}{3}\,\psi + \frac{5}{18}\,T\,f^2$

$-\frac{1}{18}\,S\,f\,\Delta.$

37. $\psi_x^6 = -\frac{3}{2} q_x^6 + \frac{5}{12} T f^2 - \frac{1}{12} S f \Delta.$

38. $a_s b_s \Delta_s = \frac{2}{3} \psi + \frac{1}{18} T f^2 + \frac{1}{6} S f \Delta.$

39. $a_t b_t \Delta_t = \frac{1}{72} S^2 f^2 + \frac{1}{36} S \Delta^2 + \frac{1}{9} T f \Delta.$

40. $\Delta_\vartheta = -2 a_s b_s u_s a_x^2 b_x^2 + \frac{1}{2} S f u_x.$

41. $\Delta_\eta = -\frac{1}{2} a_t b_t u_t a_x^2 b_x^2 + \frac{1}{8} S \Delta u_x + \frac{5}{12} T f u_x.$

42. $\Delta_\varkappa = \left(\frac{S^2 f}{36} - \frac{T \Delta}{9}\right) u_x.$

43. $\Delta_\vartheta^2 = \frac{1}{6} S f.$

44. $\Delta_s = -\frac{1}{2} K + \frac{1}{4} S \Theta + \frac{1}{6} T u_x^2 = -f_t + \frac{1}{3} S \Theta + \frac{1}{3} T u_x^2.$

45. $\Delta_t = \frac{1}{3} T \Theta - \frac{S}{6} f_s + \frac{1}{18} S^2 u_x^2 = \frac{1}{3} T \Theta - \frac{1}{6} S H + \frac{1}{36} S^2 u_x^2.$

46. $\Delta_s^2 = \frac{1}{3} T u_x.$

47. $\Delta_t^2 = \frac{1}{18} S^2 u_x.$

48. $\Delta_s^3 = T.$

49. $\Delta_t^3 = \frac{S^2}{6}.$

50. $a_\vartheta b_\vartheta = \frac{1}{3} f \Delta.$

51. $a_\vartheta a_\vartheta = \frac{1}{3} \Delta^2.$

52. $a_\eta b_\eta = \frac{S}{12} f^2 - \frac{1}{6} \Delta^2.$

53. $a_\varkappa b_\varkappa = -\frac{4}{3} \psi + \frac{2}{9} T f^2 - \frac{1}{6} S f \Delta$

54. $\Theta_{\vartheta_1} = \frac{1}{3} f s - H u_x.$

55. $\Theta_{\vartheta_1}^2 = \frac{S}{6} u_x.$

56. $\Theta_\eta = \frac{1}{2} f t - \frac{1}{6} \Delta s - \frac{1}{2} u_x \left(K + \frac{1}{6} S \Theta \right).$

57. $\Theta_\eta^2 = \frac{K}{2} - \frac{S\Theta}{12} + \frac{T}{6} u_x^2.$

58. $H_\vartheta = \frac{1}{3} \Delta s - \frac{1}{6} S \Theta u_x.$

59. $H_\vartheta^2 = -\frac{K}{2} + \frac{S\Theta}{12} + \frac{T}{6} u_x^2.$

60. $\Theta_\varkappa^2 = -\frac{SH}{3} + T\Theta + \frac{5}{36} S^2 u_x^2.$

61. $H_{\eta_1}^2 = \frac{SH}{3} - \frac{2}{3} T\Theta - \frac{S^2}{36} u_x^2.$

62. $H_\varkappa = -\frac{9}{16} S f t - \frac{11}{36} T s f - \frac{19}{144} S \Delta s + u_x \left(\frac{7}{48} S K - \frac{1}{2} T H - \frac{5}{96} S^2 \Theta \right).$

63. $H_\varkappa^2 = -\frac{5}{12} S K + \frac{1}{3} T H + \frac{11}{24} S^2 \Theta + \frac{17}{36} S T u_x^2.$

64. $K_\eta = \frac{7}{48} S f t - \frac{1}{36} T f s - \frac{5}{48} S \Delta s + u_x \left(\frac{1}{16} S K - \frac{1}{6} T H + \frac{3}{48} S^2 \Theta \right).$

65. $K_\eta^2 = -\frac{1}{4} S K + \frac{15}{72} S^2 \Theta - \frac{1}{3} T H + \frac{23}{36} S T u_x^2.$

66. $K_\vartheta^2 = -SH + \frac{5}{3} T\Theta + \frac{5}{36} S^2 u_x^2.$

67. $K_{\varkappa} = \frac{2}{9} \mathrm{T} \Delta \mathrm{s} - \frac{1}{6} \mathrm{S} \Delta \mathrm{t} + \mathrm{u_x} \left(\frac{1}{3} \mathrm{T} K - \frac{\mathrm{S}^2 H}{12} \right)$.

68. $K_{\varkappa}^2 = \left(\frac{1}{9} \mathrm{T}^2 - \frac{1}{72} \mathrm{S}^3 \right) \mathrm{u_x}$.

69. $\Theta_{\mathrm{s}} = (\mathrm{f} H \mathrm{u})^2$ (System 5).

70. $\Theta_{\mathrm{s}}^2 = \mathrm{t}$ (System 5).

71. Θ_{t} (System 7).

72. $\Theta_{\mathrm{t}}^2 = \frac{\mathrm{S}}{6} \mathrm{s}$.

73. $H_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{S\,s\,u_x}}{9} - \Theta_{\mathrm{t}}$.

74. $H_{\mathrm{s}}^2 = \frac{\mathrm{S}}{6} \mathrm{s}$.

75. $H_{\mathrm{t}} = \frac{1}{9} \mathrm{T\,s\,u_x} - \frac{\mathrm{S}}{6} \Theta_{\mathrm{s}}$.

76. $H_{\mathrm{t}}^2 = \frac{\mathrm{T\,s}}{3} - \frac{\mathrm{S\,t}}{6}$.

77. $K_{\mathrm{s}} = -\frac{\mathrm{S}}{2} \Theta_{\mathrm{s}} - \frac{1}{9} \mathrm{T\,s\,u_x} + \frac{\mathrm{S\,t}}{3} \mathrm{u_x}$.

78. $K_{\mathrm{s}}^2 = \frac{1}{2} \mathrm{S\,t} - \frac{1}{3} \mathrm{T\,s}$.

79. $K_{\mathrm{t}} = 2\,\mathrm{a_t\,b_t} - \frac{1}{6} \mathrm{S} \Theta_{\mathrm{t}} - \frac{1}{3} \mathrm{T\,t\,u_x}$.

80. $K_{\mathrm{t}}^2 = \frac{1}{3} \mathrm{T\,t} - \frac{1}{36} \mathrm{S}^2 \mathrm{s}$.

81. $\Theta_{\mathrm{s}} \Theta_{\mathrm{s_1}} = \frac{2}{3} \mathrm{s\,t} - \frac{1}{6} \mathrm{S\,p}$.

82. $\Theta_{\mathrm{s}} \Theta_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2} \mathrm{t}^2 + \frac{1}{36} \mathrm{S\,s}^2 - \frac{1}{6} \mathrm{T\,p}$.

83. $\Theta_{\mathrm{t}} \Theta_{\mathrm{t_1}} = \frac{2}{9} \mathrm{S\,s\,t} - \frac{1}{9} \mathrm{T\,s}^2 - \frac{7}{36} \mathrm{S}^2 \mathrm{p}$.

84. $(\vartheta\, s\, x) = (f\, H u)$.

85. $(\vartheta\, s\, x)\ \Theta_s\, u_\vartheta\, u_s\, \Theta_x = 0$.

86. $(\vartheta\, s\, x)^2 = -\,2\, a_s\, b_s + \frac{2}{3}\, S\, f\, u_x$.

87. $(\vartheta\, s\, x)^2\, \Theta_s\, \Theta_x = \frac{2}{3}\, S\, f$.

88. $(\vartheta\, s\, x)\ \Theta_s^2\, u_\vartheta = 0$.

89. $(\vartheta\, s\, x)^2\, a_s\, \Theta_x^2\, a_x^2 = \frac{1}{3}\, \Delta^2 + \frac{S}{6}\, f^2$.

90. $(\vartheta\, t\, x) = \frac{1}{2}\, a_t\, a_x\, b_x^2\, u_t^2\, (a\, b\, u)$ (System 7).

91. $(\vartheta\, t\, x)\ \Theta_t\, u_\vartheta\, u_t\, \Theta_x = 0$.

92. $(\vartheta\, t\, x)\ \Theta_t^2\, u_\vartheta = 0$.

93. $(\vartheta\, t\, x)^2 = -\,2\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x^2\, u_t + \frac{2}{3}\, T\, f\, u_x$.

94. $(\vartheta\, t\, x)^2\, \Theta_t\, \Theta_x = \frac{2}{3}\, T\, f$.

95. $(\vartheta\, t\, x)^2\, a_t\, \Theta_x^2\, a_x^2 = \frac{4}{3}\, \psi + \frac{1}{9}\, T\, f^2 + \frac{1}{9}\, S\, f\, \Delta$.

96. $(\eta\, s\, x) = \frac{1}{2}\, (\vartheta\, t\, x) - \frac{1}{6}\, S\, (f\, \Theta u)$.

97. $(\eta\, s\, x)\ H_s^2\, u_\eta = 0$.

98. $(\eta\, s\, x)\ H_s\, H_x\, u_\eta\, u_s = 0$.

99. $(\eta\, t\, x) = \Delta\, f_t - \Delta_t\, f$.

100. $(\eta\, t\, x)\ H_t\, u_t\, u_\eta = 0$.

101. $(\eta\, t\, x)\, H_t^2\, u_\eta = 0$.

102. $(\eta\, t\, x)^2 = \frac{1}{3}\, S\, a_s\, b_s + \frac{1}{9}\, T\, \Delta\, u_x - \frac{1}{18}\, S^2\, f\, u_x$.

103. $(\varkappa\, s\, x)^2\, K_s\, K_x = \frac{2}{3}\, T\, \Delta$.

104. $(\eta\,\mathrm{t}\,\mathrm{x})^2\,H_\mathrm{t}\,H_\mathrm{x} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{T}\,\Delta + \frac{\mathrm{S}^2}{6}\,\mathrm{f}\right).$

105. $(\varkappa\,\mathrm{t}\,\mathrm{x})^2\,K_\mathrm{t}\,K_\mathrm{x} = \frac{1}{9}\,\mathrm{S}^2\,\Delta.$

106. $(\mathrm{s}\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{x})^2\,\mathrm{u}_\mathrm{s}\,\mathrm{u}_{\mathrm{s}_1} = K + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\Theta = 2\,\mathrm{f}_\mathrm{t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{S}\,\Theta - \frac{1}{3}\,\mathrm{T}\,\mathrm{u}_\mathrm{x}^2.$

107. $(\mathrm{s}\,\mathrm{t}\,\mathrm{x})^2\,\mathrm{u}_\mathrm{s}\,\mathrm{u}_\mathrm{t} = \frac{1}{3}\,\mathrm{S}\,H + \frac{1}{3}\,\mathrm{T}\,\Theta.$

108. $(\mathrm{t}\,\mathrm{t}_1\,\mathrm{x})^2\,\mathrm{u}_\mathrm{t}\,\mathrm{u}_{\mathrm{t}_1} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{S}\,K + \frac{2}{3}\,\mathrm{T}\,H + \frac{1}{36}\,\mathrm{S}^2\,\Theta.$

109. $(\mathrm{s}\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{s}_2)^2\,\mathrm{u}_\mathrm{s}\,\mathrm{u}_{\mathrm{s}_1}\,\mathrm{u}_{\mathrm{s}_2} = \mathrm{S}\,\mathrm{t} - \frac{\mathrm{T}\,\mathrm{s}}{3}.$

110. $(\mathrm{s}\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{t})^2\,\mathrm{u}_\mathrm{s}\,\mathrm{u}_{\mathrm{s}_1}\,\mathrm{u}_\mathrm{t} = \frac{1}{3}\,\mathrm{T}\,\mathrm{t} + \frac{1}{18}\,\mathrm{S}^2\,\mathrm{s}.$

111. $(\mathrm{s}\,\mathrm{t}\,\mathrm{t}_1)^2\,\mathrm{u}_\mathrm{s}\,\mathrm{u}_\mathrm{t}\,\mathrm{u}_{\mathrm{t}_1} = \frac{1}{6}\,\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{s} - \frac{1}{18}\,\mathrm{S}^2\,\mathrm{t}.$

112. $(\mathrm{t}\,\mathrm{t}_1\,\mathrm{t}_2)^2\,\mathrm{u}_\mathrm{t}\,\mathrm{u}_{\mathrm{t}_1}\,\mathrm{u}_{\mathrm{t}_2} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{t} + \frac{2}{9}\,\mathrm{T}^2\,\mathrm{s} + \frac{1}{108}\,\mathrm{S}^3\,\mathrm{s}.$

113. $(\mathrm{s}\,\mathrm{s}_1\,\mathrm{x})^2\,\mathrm{a}_\mathrm{s}\,\mathrm{b}_{\mathrm{s}_1} = \frac{2}{9}\,\mathrm{T}\,\mathrm{f}^2 - \frac{4}{3}\,\psi.$

114. $(\mathrm{s}\,\mathrm{t}\,\mathrm{x})^2\,\mathrm{a}_\mathrm{s}\,\mathrm{b}_\mathrm{t} = \frac{1}{36}\,\mathrm{S}^2\,\mathrm{f}^2 - \frac{1}{18}\,\mathrm{S}\,\Delta^2 + \frac{1}{9}\,\mathrm{T}\,\mathrm{f}\,\Delta.$

115. $(\mathrm{t}\,\mathrm{t}_1\,\mathrm{x})^2\,\mathrm{a}_\mathrm{t}\,\mathrm{b}_{\mathrm{t}_1} = \frac{2}{9}\,\mathrm{S}\,\psi + \frac{1}{54}\,\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{f}^2 + \frac{1}{27}\,\mathrm{S}^2\,\Delta\,\mathrm{f} - \frac{1}{9}\,\mathrm{T}\,\Delta^2.$

116. $(\mathrm{s}\,\mathrm{t}\,\mathrm{x})^3 = 0.$

117. $(\vartheta\,\vartheta_1\,\mathrm{x})^2\,\Theta_\mathrm{x}^2\,\Theta_{1\mathrm{x}}^2 = \frac{4}{3}\,\mathrm{f}\,\Delta.$

118. $(\vartheta\,\vartheta_1\,\mathrm{x})^2 \cdot (\Theta\Theta_1\,\mathrm{u})^2 = \frac{\mathrm{S}}{2}\,\mathrm{u}_\mathrm{x}^2 - 2\,H.$

119. $(\vartheta\,\eta\,\mathrm{x})^2 \cdot \Theta_\mathrm{x}^2\,H_\mathrm{x}^2 = \frac{1}{3}\,\Delta^2 + \frac{1}{6}\,\mathrm{S}\,\mathrm{f}^2.$

120. $(\eta\,\eta_1\,\mathrm{x})^2 \cdot H_\mathrm{x}^2\,H_{1\mathrm{x}}^2 = \frac{4}{3}\,\psi + \frac{2}{9}\,\mathrm{T}\,\mathrm{f}^2.$

121. $(\vartheta \varkappa x)^2 \cdot \Theta_x^2 K_x^2 = -\frac{8}{3}\psi + \frac{2}{9} T f^2.$

122. $(\eta \varkappa x)^2 \cdot H_x^2 K_x^2 = -\frac{1}{6} S \Delta^2 + \frac{1}{36} S^2 f^2 + \frac{2}{9} T f \Delta.$

123. $(\varkappa \varkappa_1 x)^2 K_x^2 K_{1x}^2 = -\frac{4}{9} \Delta^2 T + \frac{1}{9} S^2 f \Delta.$

124. $a_s^2 b_s a_x b_x^2 = \frac{1}{3} S f.$

125. $a_s^2 a_t u_s u_t^2 = \frac{1}{3} S t.$

126. $a_s a_t^2 u_s^2 u_t = \frac{1}{3} T s.$

127. $(\alpha \beta \gamma)(\alpha \beta u)(\alpha \gamma u)(\beta \gamma u) = \frac{2}{3} T s - \frac{1}{2} S t.$

128. $(\alpha \beta \gamma)(\alpha \beta \delta)(\alpha \gamma \delta)(\beta \gamma \delta) = \frac{2}{3} T^2 - \frac{S^3}{12}.$

129. $(\alpha \beta a)^2 \alpha_x \beta_x a_x = \frac{1}{3} T f - \frac{S}{6} \Delta.$

130. $(\alpha \beta \gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x = \frac{S^2}{12} f - \frac{1}{3} T \Delta.$

131. $\Theta_{\vartheta_1} \Theta_{1\vartheta} \Theta_x \Theta_{1x} u_\vartheta u_{\vartheta_1} = \frac{1}{4} S u_x^2 - H.$

132. $\Theta_{\vartheta_1}^2 \Theta_{1\vartheta} \Theta_{1x} u_\vartheta = \frac{1}{3} S u_x.$

133. $\Theta_{\vartheta_1}^2 \Theta_{1s}^2 u_{\vartheta^2} u_s = \frac{S}{6} s.$

134. $f_\eta f_{\eta_1} = \frac{1}{12} S f^2 - \frac{1}{6} \Delta^2.$

135. $a_s b_s \Theta_s = \frac{1}{6} S f \Theta - \frac{1}{6} \Delta f_s + \frac{1}{2} f f_t + \frac{1}{6} T f u_x^2 - a_t b_t \cdot u_x.$

136. $a_t b_t \Theta_t = \frac{1}{6} T f \Theta + \frac{1}{12} S f f_s - \frac{1}{6} \Delta f_t \pmod{u_x}.$

137. $\alpha_s b_s \Theta_s = \frac{1}{6} T f \Theta - \frac{1}{12} S f f_s + \frac{1}{6} \Delta f_t + \frac{1}{9} S \Delta \Theta \pmod{u_x}.$

138. $a_t b_t H_t = f_s\left(\frac{1}{3} T f + \frac{1}{36} S \Delta\right) - \frac{1}{12} S f f_t - \frac{1}{18} T \Theta \Delta \pmod{u_x}$.

139. $f_p = -2 u_x \Theta_s + \frac{1}{3} \Theta s + t u_x^2$.

140. $f_p^2 = -\frac{7}{5} \Theta_s + t u_x$.

141. $f_p^3 = \frac{4}{5} t$.

142. $\Delta_p = \Theta \cdot t - \frac{2}{3} f_s t - 2 \Theta_t u_x + \frac{5}{18} S s u_x^2$.

143. $\Delta_p^2 = -\frac{3}{5} \Theta_t + \frac{11}{90} S s u_x$.

144. $\Delta_p^3 = \frac{2}{15} S s$.

145. $\Theta_p = \frac{1}{9} s^2 u_x$.

146. $\Theta_p^2 = \frac{1}{5} s^2$.

147. $H_p = -\frac{1}{3} \Theta_s + \frac{1}{3} s t u_x$.

148. $H_p^2 = \frac{1}{15} S \cdot p - \frac{1}{15} s t$.

149. $K_p = -2\Theta_s t + t^2 u_x + 2\Theta_t s$.

150. $K_p^2 = \frac{2}{15} T \cdot p - \frac{1}{9} S s^2 + \frac{3}{5} t^2$.

151. $a_p b_p = \frac{1}{5} f_s \Theta - \frac{2}{5} \Theta_s f$
$+ u_x \left[\frac{14}{45} s \Delta - \frac{1}{5} u_x \left(\frac{3}{2} K - \frac{1}{12} S\Theta + \frac{1}{6} T u_x^2\right)\right]$.

152. $a_p \alpha_p = \frac{1}{20} S\Theta^2 - \frac{1}{10} \Theta K - \frac{4}{15} a_s b_s \cdot s - \frac{2}{5} \Delta \Theta_s$
$+ u_x \left(\frac{8}{45} t \Delta + \frac{1}{45} S f s\right) + u_x^2 \left(\frac{1}{6} T\Theta + \frac{7}{30} S H + \frac{S^2 u_x^2}{180}\right)$.

153. $\alpha_p \beta_p = -\frac{2}{5}\,\Theta_t \Delta + \frac{1}{5}\,T\Theta^2 - \frac{1}{10}\,S\Theta H - \frac{4}{5}\,t a_s b_s$
$+ u_x\left(\frac{4}{45}\,S\Delta s + \frac{1}{3}\,Sft - \frac{8}{45}\,Tsf\right) + u_x^2 \cdot \left[\frac{1}{40}\,S^2\Theta + \frac{8}{15}\,TH - \frac{3}{20}\,SK\right].$

154. $a_p^2 b_p^2 = \frac{3}{5}\,K - \frac{1}{18}\,S\Theta + \frac{2}{15}\,Tu_x^2.$

155. $a_p^2 \alpha_p^2 = \frac{1}{15}\,SH - \frac{1}{15}\,T\Theta + \frac{1}{45}\,S^2 u_x^2.$

156. $\alpha_p^2 \beta_p^2 = \frac{1}{18}\,SK + \frac{2}{15}\,TH - \frac{1}{180}\,S^2\Theta + \frac{1}{45}\,STu_x^2.$

157. $a_p^2 b_p = \frac{7}{30}\,s\Delta - \frac{1}{10}\,tf + u_x\left(\frac{9}{10}\,K - \frac{1}{12}\,S\Theta + \frac{T}{15}\,u_x^2\right).$

158. $a_p^2 \alpha_p = \frac{11}{30}\,t\Delta - \frac{7}{180}\,Ssf + u_x\left(\frac{1}{6}\,SH - \frac{1}{10}\,T\Theta + \frac{1}{90}\,S^2 u_x^2\right).$

159. $\alpha_p^2 a_p = \frac{1}{10}\,t\Delta + \frac{1}{180}\,Ssf + u_x\left(\frac{1}{6}\,SH - \frac{1}{10}\,T\Theta + \frac{1}{90}\,S^2 u_x^2\right).$

160. $\alpha_p^2 \beta_p = \frac{7}{180}\,S\Delta s + \frac{1}{20}\,Stf - \frac{1}{15}\,Tsf$
$+ u_x\left(-\frac{1}{12}\,SK + \frac{1}{15}\,TH + \frac{1}{60}\,S^2\Theta + \frac{1}{90}\,STu_x^2\right).$

161. $a_p^3 b_p = \frac{2}{5}\,K + \frac{1}{15}\,S\Theta + \frac{2}{15}\,Tu_x^2 = \frac{4}{5}\,f_t.$

162. $a_p^3 \alpha_p = \frac{4}{15}\,T\Theta - \frac{2}{15}\,SH + \frac{1}{45}\,S^2 u_x^2 = \frac{4}{5}\,\Delta_t.$

163. $\alpha_p^3 a_p = \frac{2}{15}\,T\Theta - \frac{2}{15}\,Sf_s + \frac{1}{45}\,S^2 u_x^2.$

164. $\alpha_p^3 \beta_p = \frac{1}{30}\,S^2\Theta - \frac{1}{15}\,SK + \frac{1}{45}\,STu_x^2 = \frac{2}{5}\,S\Delta_s.$

165. $(p\vartheta x)^2 = -2\Theta_s f + 2f \cdot tu_x - \frac{28}{45}\,s\Delta u_x - \frac{2}{5}\,H\Theta$
$- u_x^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\,K - \frac{1}{6}\,S\Theta + \frac{u_x^2}{15}\,T\right).$

166. $(\mathfrak{p}\,\eta\,\mathfrak{x})^2 = \frac{2}{5}\Delta\Delta + \frac{2}{5}\,M\mathfrak{f} + \frac{1}{5}\,\Theta K - \frac{S\Theta}{10} - \frac{8}{15}\,\mathfrak{s}\mathfrak{f}_\eta$
$$- \frac{4}{15}\,\Delta\mathfrak{t}\mathfrak{u}_x + \frac{14}{45}\,S\mathfrak{f}_s\,\mathfrak{s}\mathfrak{u}_x.$$

167. $(\mathfrak{p}\varkappa\mathfrak{x})^2 = \frac{4}{15}\,M\Delta + \frac{8}{15}\,L\mathfrak{t} + \frac{8}{15}\,M\mathfrak{s} + \frac{1}{5}\,H(K - 2S\Theta)$
$$+ \frac{1}{5}\,T\Theta^2 + \frac{\mathfrak{u}_x}{45}\left(\frac{4}{3}\,S\mathfrak{s}\Delta + 7S\mathfrak{t}\mathfrak{f} - \frac{28}{3}\,T\mathfrak{s}\mathfrak{f}\right)$$
$$+ \frac{\mathfrak{u}_x^2}{45}\left(23\,TH + 6\,SK + \frac{1}{4}\,ST\mathfrak{u}_x^2 + \frac{9}{8}\,S^2\Theta\right).$$

168. $\Theta_p\,(\mathfrak{p}\,\vartheta\,\mathfrak{x})^2 = \frac{9}{10}\,\mathfrak{t}\mathfrak{f} - \frac{7}{30}\,\mathfrak{s}\Delta - \mathfrak{u}_x\left(\frac{9}{10}\,K - \frac{1}{12}\,S\Theta + \frac{T}{15}\,\mathfrak{u}_x^2\right).$

169. $H_p\,(\mathfrak{p}\,\eta\,\mathfrak{x})^2 = \frac{1}{6}\,\Delta\mathfrak{t} + \frac{1}{12}\,S\mathfrak{f}\mathfrak{s} - \mathfrak{u}_x\left(\frac{1}{6}\,SH - \frac{1}{10}\,T\Theta + \frac{1}{90}\,S^2\mathfrak{u}_x^2\right).$

170. $K_p\,(\mathfrak{p}\varkappa\mathfrak{x})^2 = \frac{17}{180}\,S\Delta\mathfrak{s} - \frac{1}{20}\,S\mathfrak{t}\mathfrak{f}$
$$+ \frac{1}{15}\,T\mathfrak{s}\mathfrak{f} - \mathfrak{u}_x\left(-\frac{1}{12}\,SK + \frac{1}{15}\,TH + \frac{1}{60}\,S^2\Theta + \frac{1}{90}\,ST\mathfrak{u}_x^2\right).$$

171. $\Theta_p^2\,(\mathfrak{p}\,\vartheta\,\mathfrak{x})^2 = \frac{11}{45}\,S\Theta - \frac{2}{5}\,K.$

172. $H_p^2\,(\mathfrak{p}\,\eta\,\mathfrak{x})^2 = \frac{2}{5}\,T\Theta - \frac{2}{15}\,SH.$

173. $K_p^2\,(\mathfrak{p}\varkappa\mathfrak{x})^2 = -\frac{11}{180}\,S^2\Theta + \frac{2}{15}\,TH - \frac{17}{90}\,SK + \frac{1}{15}\,ST\mathfrak{u}_x^2.$

174. $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{x})^2 = -\frac{4}{5}\,\mathfrak{f}_s\mathfrak{p} + \frac{4}{9}\,\Theta\mathfrak{s}^2$
$$+ \mathfrak{u}_x\left(-\frac{16}{15}\,\Theta_s\cdot\mathfrak{s} + \frac{28}{75}\,\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{u}_x + \frac{49}{225}\,S\mathfrak{p}\,\mathfrak{u}_x\right).$$

175. $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{x})^4 = -\frac{38}{75}\,(\mathfrak{f}_s)^2 + \frac{4}{3}\,\mathfrak{f}_t\Theta - \frac{8}{3}\,\Theta_t\mathfrak{f} + \frac{8}{15}\,\Theta_s\Delta + \frac{1}{45}\,S\Theta^2 \pmod{\mathfrak{u}_x}.$

176. $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{x})^6 = -\frac{8}{15}\,\psi - \frac{56}{45}\,T\mathfrak{f}^2 + \frac{8}{9}\,S\mathfrak{f}\Delta.$

177. $(\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)^2 = -\frac{4}{3^3\cdot 5}\,\mathfrak{s}^4 + \mathfrak{p}\left(\frac{7}{225}\,S\mathfrak{p} + \frac{8}{25}\,\mathfrak{s}\mathfrak{t}\right).$

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Lebenslauf.

Ich, Karl Strauß, bin am 16. Juli 1883 zu Bad Dürkheim (Rheinpfalz) geboren als Sohn des Reallehrers Ludwig Strauß, jüdischer Konfession. Im Jahre 1902 absolvierte ich das humanistische Gymnasium zu Neustadt a. H. und oblag hierauf 5 Semester an der Universität München und 3 Semester an der Universität Erlangen dem Studium der Mathematik und Physik. Nach bestandenem Lehramtsexamen (1906) praktizierte ich ein Jahr am Kgl. Realgymnasium in Augsburg. Von 1907 bis 1912 war ich als Reallehrer an der Bärmannschen Realschule zu Bad Dürkheim tätig. Seit Beginn des Schuljahres 1912/13 bin ich Assistent an der Kgl. Realschule zu Aschaffenburg.

Während meiner Studienzeit hörte ich die Vorlesungen der Herren Professoren: Bauer, Döhlemann, Grätz, Fischer, Gordan, Leser, Lindemann, Lotz, Muncker, Noether, Pringsheim, Röntgen, Sandberger, Seeliger, Voß, Wiedemann, Zehnder.